Analisi Matematica 1 – Matematica

Preparazione Secondo Compitino 22 Gennaio 2014 - Foglio 12

Esercizio 1 Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua nel punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x^\alpha} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x^2)}{|x|^\alpha} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso, allora lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo.
iii) Provare che se $(\mathbb{R}, d)$ è completo, allora $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Esercizio 3 Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{ \frac{i}{2^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \text{ ed } i = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \Big\}$$

dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Calcolare la chiusura $\bar{A}$.

Esercizio 4 Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \le 1\big\},$$
$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x^3 + xy + y^3 \le 1\big\}.$$

Esercizio 5 Sia $0 < a < 1$ un numero reale e definiamo $a_n \in (-1, 0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
i) Assumendo come nota la disuguaglianza

$$|a_n| \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \ge 1, \tag{*}$$

studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

ii) Provare la $(*)$.

Esercizio 1. Risposta: $0 < \alpha < 2$. Provare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$. Usare la definizione di $\mathrm{e}^{1/x}$, che sarà al denominatore, tramite serie di potenze, troncare opportunamente la serie e calcolare il limite per confronto.

Esercizio 2. Risposte: In ii) e iii), usare questo fatto: se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ allora $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy nella distanza standard di $\mathbb{R}$, e viceversa.

Esercizio 3. Risposta: $\bar{A} = [0, 1]$. Osservazione:

$$\left| \frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Quindi, se $x \in [0, 1]$ ed $\varepsilon > 0$, allora scegliendo $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/2^n < \varepsilon$ ed i opportuno vedo chiaramente che $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Possiamo selezionare una successione in A convergente ad x.

Esercizio 4. Risposte: K è chiuso e limitato; H è chiuso ma non è limitato.

Esercizio 5. Risposte: i) La serie converge semplicemente. Si spezza la serie in una somma di due serie. In una è facile usare il Criterio di Leibniz, l'altra converge assolutamente, perchè (Criterio di condensazione)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n + 1)} < \infty.$$

ii) Disuguaglianza di Bernoulli a partire da

$$\frac{1}{a} = \Big(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\Big)^n.$$