Analisi Matematica 1 – Matematica

Spazi metrici, successioni numeriche Foglio 3

Esercizio 1 Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ due punti tali che $\langle x, y\rangle = |x||y| \neq 0$. Provare che esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $x = \lambda y$.

Esercizio 2 Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ (cioè verifica le tre proprietà di uno spazio metrico) e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 3 Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

Esercizio 4 1) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 4}{3n^2 + 2\cos n} = \frac{2}{3}.$$

2) Usando il teorema sulle operazioni elementari coi limiti, calcolare il valore $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ del seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right).$$

Verificare la correttezza del risultato utilizzando la definizione.

Esercizio 5 Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in funzione di m tali che il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\sqrt[m]{n + 1} - \sqrt[m]{n}\right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 6 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \ldots + a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 7 Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Provare che il polinomio della variabile reale $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

non ha zeri reali, ovvero non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ con $p(x) = 0$. È ammesso (necessario) usare tutte le conoscenze delle scuole superiori.