Analisi Matematica 1 – Matematica

Esercizio 1 Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 3^n + n^2\sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2 + \log n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{2n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\log n + 1/n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizio 2 Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso e si consideri la successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \left(z^n + \frac{i}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che per $|z| < 1$ la successione converge e che per $|z| > 1$ la successione non converge.

Esercizio 3 Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta, b > 0$ studiare la convergenza delle successioni

$$1) \quad a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad 2) \quad b_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 4 Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

Esercizio 5 Siano $a_0, a_1 > 0$ e per $n \geq 1$ si definisca in modo ricorsivo $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

i) Supponendo che $a_{n+1} \geq 2$ provare che

$$\left|\sqrt{a_{n+1}} - 2\right| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - 2| + |\sqrt{a_{n-1}} - 2|}{2 + \sqrt{2}}.$$

ii) Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 6 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare allora che anche $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.