Analisi Matematica 1 – Matematica

Successioni ricorsive, liminf e limsup, serie reali — Foglio 5

Esercizio 1 Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

Esercizio 2 Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero razionale non negativo, $x \geq 0$. Calcolare il limite superiore:

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} \Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2} + nx\Big)\pi\Big) - \frac{1}{n}\Big).$$

Casa si riesce a dire del limite inferiore?

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2} + nx\Big)\pi\Big) - \frac{1}{n}\Big)$$

Esercizio 3 Verificare che

$$\liminf_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 1,$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 4 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\ ; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n} + |2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6 Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

Esercizio 7 Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.