Analisi Matematica 1 – Matematica

Esercizi vari | Mercoledì 11 Dicembre - Foglio 8

A. Esercizi di primo livello

Esercizio 1 Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le 'forme indeterminate':

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$
$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2},\ \text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R};\quad 5)\ \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0},\ \text{dove } x_0>0;$$

Risposte: 1) -1; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$. Ai punti 3) e 4), si assuma come noto il limite notevole $\sin x/x \to 1$ per $x\to 0$. Al punto 3): sostituzione.

Esercizio 2 Dedurre le formule di addizione per seno e coseno, con $x, y\in\mathbb{R}$,

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta)=\exp(z)\exp(\zeta)$ con $z,\zeta\in\mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

B. Esercizi di secondo livello

Esercizio 3 Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{1+2x}=1.$$

La soluzione si trova negli appunti on line.

Esercizio 4 Si considerino la striscia $S=\{z\in\mathbb{C}: -\pi<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ e l'insieme $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)=0\ \text{e}\ \mathrm{Re}(z)\le 0\}$.
1) Verificare che la funzione esponenziale $\exp: S\to\mathbb{C}^*$ è iniettiva.
2) La funzione argomento $\arg:\mathbb{C}^*\to(-\pi,\pi)$ è definita in questo modo: $\arg(z)=$angolo con segno formato da z (unito a 0) con il semiasse positivo delle parti reali. La funzione logaritmo complesso $\log:\mathbb{C}^*\to S$ è quindi definita nel seguente modo:

$$\log z=\log|z|+i\arg(z),\quad z\in\mathbb{C}^*.$$

Verificare che $\exp: S\to\mathbb{C}^*$ è anche suriettiva e che log è la sua funzione inversa.

C. Esercizi di terzo livello

Esercizio 5 Usando la definizione, provare che

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2}{|z|^2 + 1} = \frac{z_0^2}{|z_0|^2 + 1}$$

per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, dove z varia in $\mathbb{C}$, e sui complessi si considera la distanza standard.

Esercizio 6 Provare che $\lim_{n \to \infty} n \sin(2\pi n! \mathrm{e}) = 2\pi$.
Usare il limite notevole $\sin x/x \to 1$ per $x \to 0$.