Analisi Matematica 1 – Matematica

Primo compitino — Mercoledì 20 Novembre 2013

Esercizio 1 (11 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+1-n2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$, e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

Soluzione. Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{n+1-n2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La successione

$$b_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

è strettamente decrescente. La successione

$$c_n = \frac{n}{n+1}$$

è strettamente crescente. Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = b_n - c_n$, è strettamente decrescente. Inoltre, è elementare calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{n+1} \right) = 0 - 1 = -1.$$

Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$-1 < a_n \le a_0.$$

Deduciamo che $\sup A = \max A = a_0 = 1/2$. Analogamente si ha

$$\inf A = -1,$$

infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < -1 + \varepsilon$. Il $\min A$ non esiste in quanto $a_n > -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 (11 punti) Al variare dei numeri naturali $k, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^m}{(2kn)!}.$$

Soluzione. Detta $a_n = (n!)^m/(2kn)!$ la successione in questione, formiamo il rapporto

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^m}{(2k(n+1))!} \cdot \frac{(2kn)!}{(n!)^m} \\ &= \frac{(n+1)^m}{(2kn+2k)(2kn+2k-1)\dots(2kn+1)} \\ &= \frac{n^m}{n^{2k}} \frac{(1+1/n)^m}{(2k+2k/n)\dots(2k+1/n)}.\end{aligned}$$

Al denominatore della frazione lunga appare il prodotto di $2k$ fattori. Chiaramente si ha

$$\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^m = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} (2k+2k/n)\dots(2k+1/n) = (2k)^{2k}.$$

Distinguiamo i seguenti casi:

(1) Se $m > 2k$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+1}/a_n \geq 2$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Per iterazione si deduce che per $n \geq n$

$$a_n \geq 2^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

e quindi per confronto si deduce che $L = \infty$.

(2) Se $m < 2k$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+1}/a_n \leq 1/2$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Per iterazione si deduce che per $n \geq n$

$$a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

e quindi per confronto si deduce che $L = 0$.

(3) Se $m = 2k \neq 0$ allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2k)^{2k}} < 1/2,$$

e come nel punto (2) si deduce che $L = 0$.
Quando invece $m = k = 0$ il limite è $L = 1$ perchè $0! = 1$.

Esercizio 3 (11 punti) Al variare del numero reale $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < 1$ calcolare i seguenti limite inferiore e limite superiore

$$
\begin{aligned}
L^-(x) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\right\},\\
L^+(x) &= \limsup_{n\to\infty} \left\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\right\},
\end{aligned}
$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Stabilire per quali $0 < x < 1$ esiste il limite della successione in esame.

Soluzione. Chiaramente si ha $0 \le L^-(x) \le L^+(x) \le 1$, per le proprietà della parte frazionaria.
Osserviamo che (questo conto è rilevante quando n è pari di modo tale che $(-1)^n = 1$):

$$
\begin{aligned}
\left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} &= \left\{\sqrt{n^2+2nx} - n\right\} = \left\{\frac{2nx}{\sqrt{n^2+2nx}+n}\right\}\\
&= \left\{\frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1}\right\} = \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo usato il fatto che la parte frazionaria non cambia se si aggiunge un numero intero, e poi abbiamo usato il fatto che, essendo $0 < x < 1$, si ha

$$
0 < \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1} < 1.
$$

Siccome $\sqrt{1+2x/n} \to 1$ per $n \to \infty$, si trova il limite

$$
\lim_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} = x.
$$

Analogamente, osserviamo che (questo conto è rilevante quando n è dispari):

$$
\begin{aligned}
\left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\} &= \left\{n - \sqrt{n^2+2nx}\right\} = \left\{\frac{-2nx}{\sqrt{n^2+2nx}+n}\right\}\\
&= \left\{1 - \frac{2nx}{\sqrt{n^2+2nx}+n}\right\} = \left\{1 - \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1}\right\}\\
&= 1 - \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1}.
\end{aligned}
$$

Anche qui abbiamo usato il fatto che la parte frazionaria non cambia se si aggiunge un numero intero, e poi abbiamo usato di nuovo il fatto che

$$
0 < 1 - \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1} < 1.
$$

Dunque si trova il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty} \{ - \sqrt{n^2 + 2nx}\} = 1 - x.$$

Dalla discussione precedente deduciamo che i limiti inferiore e superiore sono rispettivamente

$$L^-(x) = \min\{x, 1 - x\},$$
$$L^+(x) = \max\{x, 1 - x\}.$$

Il limite esiste se e solo se $L^-(x) = L^+(x)$ ovvero se e solo se $\min\{x, 1-x\} = \max\{x, 1-x\}$ ovvero se e solo se $x = 1 - x$, ovvero $x = 1/2$.