

Analisi Matematica 1A – 2013-14 – Programma finale

Insiemi e funzioni. Operazioni sugli insiemi, funzioni fra insiemi, funzioni inversa e composta. Cardinalità, equipotenza fra insiemi, insieme potenza; teorema di Cantor-Schröder-Bernstein. Numerabilità di \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} . Unione di numerabili è numerabile. Non numerabilità di \mathbb{R} . Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton.

Numeri reali. Relazioni d'ordine. Descrizione assiomatica: proprietà algebriche e proprietà ordinali. Estremo superiore e inferiore. Assioma di completezza. Proprietà di Archimede. Parte intera e frazionaria. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Costruzione di \mathbb{R} con le sezioni di \mathbb{Q} . \mathbb{R} come spazio metrico. Prodotto scalare e norma in \mathbb{R}^n , disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. \mathbb{R}^n come spazio metrico.

Successioni reali e complesse. Limiti di successioni reali e complesse. Unicità del limite. Successioni divergenti. Operazioni con i limiti. Teorema del confronto. Successioni elementari e confronti. Teorema sulle successioni monotone. Successioni ricorsive. Limiti inferiore e superiore e loro caratterizzazione.

Serie numeriche reali e complesse. Definizione di serie di numeri reali o complessi, convergenza e divergenza. Condizione necessaria. Serie geometrica e serie telescopiche. Criterio del rapporto e della radice per serie a termini positivi. Criterio di condensazione di Cauchy. Convergenza assoluta. Criteri di Abel-Dirichlet e di Leibniz. La funzione e^x , tramite limite e serie: equivalenza. Proprietà della funzione esponenziale. Sottosuccessioni, Teoremi di Bolzano-Weierstrass e della sottosuccessione convergente. Successioni di Cauchy e completezza metrica di \mathbb{R} . Criteri di Cesàro (senza dim.). Rappresentazione binaria e decimale dei reali. Riordinamenti. Teorema del confronto asintotico. Teorema di Mertens. Serie di potenze, raggio di convergenza (senza convergenza uniforme). Esponenziale, seno e coseno di un numero complesso, proprietà di e^z con $z \in \mathbb{C}$.

Spazi metrici e funzioni continue. Spazi metrici. Limiti di successioni in spazi metrici. Limiti di funzioni e caratterizzazione sequenziale del limite, operazioni con i limiti. Funzioni continue fra spazi metrici, caratterizzazione sequenziale. Le serie di potenze definiscono funzioni continue. Topologia di uno spazio metrico, aperti, chiusi, interno, chiusura, frontiera; assiomi della topologia. Caratterizzazione topologica della continuità. Spazi metrici completi, Teorema del completamento (senza dim.). Compattezza sequenziale, Teorema di Heine-Borel. Compattezza ed equivalenza con la compattezza sequenziale (senza dim.). Continuità e compattezza, Teorema di Weierstrass. Continuità uniforme, Teorema di Heine-Cantor. Funzioni Lipschitziane e Hölderiane. Insiemi connessi e continuità, Teorema degli zeri e di valori intermedi. Connessi per archi. I connessi di \mathbb{R} sono gli intervalli.

Sono esclusi dal programma:

–Cap. 4: Dimostrazioni dei Teoremi 11.1 e 11.2; dimostrazione del Teorema 13.3; Sezioni 16-17-18.

–Cap. 5: Sezione 2; Sottosezioni 5.2 e 5.3; Dimostrazione del Teorema 8.8; Esempio 9.5; Proposizione 10.6; Sezione 12; Teorema 13.11.

–Gli esercizi contenuti nelle sezioni di esercizi.

Sono inclusi nel programma: i Fogli di Esercizi 1-12 disponibili on-line alla pagina del corso.

23 Gennaio 2014

R. Monti