Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto — Venerdì 31 Gennaio 2014

Esercizio 1 (10 punti) Sia $a_0 \in (-1, 1]$ e si consideri la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, \quad n \geq 0.$$

i) Provare che $a_{2n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che la successione $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.
ii) Studiare l'andamento della successione $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
iii) Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Suggerimento: studiare la relazione ricorsiva che lega a_{n+1} con a_{n-1}.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono sequenzialmente compatti

$$K = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq f(x) \leq 2\big\} \quad \text{e} \quad H = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq 1/2\big\}.$$

Suggerimento: Studiare la continuità di f e i limiti a $\pm\infty$.

Esercizio 3 (10 punti) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}}},$$

dove $\log = \log_{\mathrm{e}}$ è il logaritmo naturale.

2.30 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione