Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto 4 Febbraio 2015

Esercizio 1 (10 punti) Al variare di $x \in [0, 2\pi)$ studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1} \cos(nx).$$

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n+1]{n+1} \cdots \sqrt[2n]{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i due limiti:

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{1/3}} \quad \text{ed} \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}}.$$

Sugg.: Opportuni confronti.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - 1}{(x+1)(x+\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

e consideriamo l'insieme

$$K_\alpha = \big\{x \geq 0 : -2 < f_\alpha(x) \leq 1\big\} \subset \mathbb{R}.$$

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) K_α è aperto;

ii) K_α è chiuso;

iii) K_α è compatto.

2.00 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione