

Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto

Lunedì 30 Giugno 2014

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(x) \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} sono compatti:

- 1) $A = \{\varphi(x) \in \mathbb{R} : |x| \leq 27\}$;
- 2) $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{27} \leq \varphi(x) < 1\}$;
- 3) $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \varphi(x) = \sin^2(1/x)\}$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $\alpha > 0$ un parametro e si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i limiti:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $\alpha > 0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ per $\alpha = 2$.

Esercizio 3 (10 punti) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -1$ studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{1+x^n} \right)^n.$$

2.00 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione