

Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto

Martedì 15 Luglio 2014

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{i}{3^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3^n \leq i \leq 4^n \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ nella distanza standard.

Esercizio 2 (10 punti) 1) Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n + 1)}.$$

2) Provare che $(1 - 1/n)^n \leq 1/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dedurre che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1 + a_n \quad \text{con} \quad |a_n| \leq \frac{1}{n}.$$

3) Stabilire se converge semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}(\log^2 n + 1)}.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $X = (-1, \infty)$ e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \left| \log \left(\frac{1+x}{1+y} \right) \right|, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$, $d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$, con $s, t \in \mathbb{R}$.

3) Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

2.00 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione