Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto — Martedì 15 Luglio 2014

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{i}{3^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3^n \leq i \leq 4^n \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ nella distanza standard.

Soluzione. Proviamo che $\bar{A} = [1, \infty)$. Certamente $\bar{A} \subset [1, \infty)$ perchè tutti gli elementi di A sono maggiori o uguali ad 1.
Sia $x \in [1, \infty)$. Dobbiamo provare che per ogni $r > 0$ si ha

$$B_r(x) \cap A = (x - r, x + r) \cap A \neq \emptyset.$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{3^n} < r \quad \text{e} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n > x.$$

Sia $i = \max\left\{j \in \mathbb{N} : j/3^n \leq x\right\}$. L'insieme di cui si prende il massimo è non vuoto, infatti $j = 3^n$ è nell'insieme, ed in particolare $i \geq 3^n$. Inoltre, $i < 4^n$ perchè $4^n/3^n > x$.
Si ha $i/3^n + 1/3^n > x > x - r$, altrimenti i non sarebbe il massimo. Si ha $i/3^n + 1/3^n < x + r$, dal momento che $1/3^n < r$. Dunque, si conclude che

$$\frac{i+1}{3^n} \in (x - r, x + r) = B_r(x).$$

Inoltre, dal fatto che $i < 4^n$ si deduce che $i + 1 \leq 4^n$. Questo prova che si ha anche $\frac{i+1}{3^n} \in A$.

Esercizio 2 (10 punti) 1) Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n + 1)}.$$

2) Provare che $(1 - 1/n)^n \leq 1/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dedurre che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1 + a_n \qquad \text{con} \qquad |a_n| \leq \frac{1}{n}.$$

3) Stabilire se converge semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}(\log^2 n + 1)}.$$

Soluzione. 1) Il termine generale della serie è positivo e decrescente. Si può usare il Criterio di condensazione di Cauchy. La serie converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log^2(2^n)+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log^2 2 + 1}.$$

Il termine generale è asintotico a $1/n^2$ e quindi la serie converge.
2) Usiamo la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{1}{\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big)^n} = \frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n-1}\Big)^n} \le \frac{1}{1+\dfrac{n}{n-1}} = \frac{n-1}{2n-1} \le \frac{1}{2}.$$

Riordinando si ottiene la disuguaglianza

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \le \frac{1}{n}.$$

Ora si trova

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1 + a_n, \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - 1 \quad \text{che verifica} \quad |a_n| \le \frac{1}{n}.$$

3) Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}(\log^2 n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1}.$$

La serie a sinistra nella somma converge semplicemente per il Criterio di Leibniz. La serie a destra nella somma converge assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1} \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n+1)} < \infty.$$

Esercizio 3 (10 punti) Siano $X = (-1,\infty)$ e $d : X \times X \to [0,\infty)$ la funzione

$$d(x,y) = \Big| \log\Big(\frac{1+x}{1+y}\Big)\Big|, \quad x,y \in X.$$

1) Provare che (X,d) è uno spazio metrico.
2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X,d)$, $d(\varphi(t),\varphi(s)) = |t-s|$, con $s,t \in \mathbb{R}$.
3) Provare che (X,d) è uno spazio metrico completo.

Soluzione. 1) Si ha $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se $x = y$, in quando $\log 1 = 0$. Se poi $d(x,y) = 0$ allora

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1+y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Chiaramente d è simmetrica:

$$d(x,y) = \left|\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right| = \left|-\log\left(\frac{1+y}{1+x}\right)\right| = \left|\log\left(\frac{1+y}{1+x}\right)\right| = d(y,x).$$

Per la disuguaglianza triangolare si può procedere in questo modo:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\log(1+x) - \log(1+y)| = |\log(1+x) - \log(1+z) + \log(1+z) - \log(1+y)| \\ &\leq |\log(1+x) - \log(1+z)| + |\log(1+z) - \log(1+y)| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

2) La funzione $\psi : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \log(1+x)$ è iniettiva e suriettiva e inoltre

$$|\psi(x) - \psi(y)| = \left|\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right| = d(x,y), \qquad x, y \in X.$$

Dunque ψ è un'isometria da $X = (-1,\infty)$ in $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. L'inversa di ψ è la funzione $\varphi(t) = \mathrm{e}^t - 1$, $t \in \mathbb{R}$. La funzione φ è l'isometria cercata.

3) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione di Cauchy in (X,d) allora $(\psi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, che è completo. Dunque esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\psi(a_n) \to t$ per $n \to \infty$, nella distanza standard. Di conseguenza, $a_n = \varphi(\psi(a_n)) \to \varphi(t)$ in (X,d), per $n \to \infty$. Dunque, ogni successione di Cauchy in (X,d) converge in X.