Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto — Lunedì 8 Settembre 2014

Esercizio 1 (10 punti) Dato un numero reale $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo per ricorsione la successione numerica

$$a_{n+1} = \operatorname{arctg}(a_n + 1), \quad n \geq 0.$$

Dimostrare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1) Se f è continua allora A è aperto.

2) Se A è aperto allora f è continua.

3) Se f è continua allora C è chiuso.

4) Se C è chiuso allora f è continua.

Esercizio 3 (10 punti) Calcolare i seguenti limiti inferiore e superiore

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}} \right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}} \right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

2.00 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione