

Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino

Lunedì 27 Gennaio 2014

Esercizio 1 (10 punti) Al variare del parametro $\alpha > 0$ si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1 \right).$$

- i) Provare che la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$.
- ii) Provare che la funzione $\varphi(x) = \sqrt{1+x} - 1 - x/2$ verifica $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ per ogni $x \geq -1$.
- iii) Provare che per $\alpha > 1/2$ la serie converge semplicemente.

Esercizio 2 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + 1} \in \mathbb{R} : 1 \leq m \leq n, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Provare che $[1/2, 1] \subset \bar{A}$.

Esercizio 3 (10 punti) Sia $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, consideriamo la funzione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1/x$, e definiamo la funzione $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in X.$$

- i) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
- ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
- iii) Calcolare il completamento di (X, d) .