Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino | Lunedì 27 Gennaio 2014

Esercizio 1 Al variare del parametro $\alpha > 0$ si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1\Big).$$

i) Provare che la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$.
ii) Provare che la funzione $\varphi(x) = \sqrt{1+x}-1-x/2$ verifica $|\varphi(x)| \le \frac{1}{2}x^2$ per ogni $x \ge -1$.
iii) Provare che per $\alpha > 1/2$ la serie converge semplicemente.

Risoluzione. i) Dobbiamo stabilire per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1\Big|.$$

Moltiplicando e dividendo il termine generale per $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}+1$ si trova

$$a_n = \left|\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1\right| = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}+1}.$$

È quindi facile calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = 1/2 \neq 0.$$

Per Confronto Asintotico con la serie nota $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\alpha > 1$.
ii) Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+x}+1+x/2$ si trova in questo caso, per ogni $x \ge -1$,

$$|\varphi(x)| = \frac{|1+x-(1+x/2)^2|}{\sqrt{1+x}+1+x/2} = \frac{x^2/4}{\sqrt{1+x}+1+x/2} \le \frac{x^2}{2}.$$

Per ottenere l'ultima disuguaglianza si usa il fatto che $\sqrt{1+x}+1+x/2 \ge 1/2$, valore che si trova per $x = -1$.
iii) Per come è definita la funzione φ si ha

$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1 = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+\varphi\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big),$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big).$$

Usando il punto ii) si trova la stima

$$\Big|\varphi\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)\Big|\leq\frac{1}{2n^{2\alpha}},$$

e quindi, per confronto, quando $\alpha > 1/2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)$$

converge assolutamente e, per il Criterio della convergenza assoluta, anche semplicemente. Poi, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$$

converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$, per il Criterio di Leibniz.

Questo prova che la serie in esame converge semplicmente per $\alpha > 1/2$.

Esercizio 2 Si consideri l'insieme

$$A=\Big\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+1}\in\mathbb{R}\,:\,1\leq m\leq n,\ m,n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Provare che $[1/2, 1] \subset \bar{A}$.

Risoluzione. Per ogni $x \in (0, 1]$ esistono due successioni di numeri interi $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ con $p_k \leq q_k$ tali che

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k}=x.$$

Con la scelta $n_k = kq_k$ ed $m_k = kp_k$ si ottiene la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di A

$$a_k=\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{m_k}+\sqrt{n_k}+1}=\frac{1}{\sqrt{p_k/q_k}+1+1/\sqrt{kq_k}}.$$

Per la caratterizzazione sequenziale della chiusura, il limite della successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è, per ogni $x \in (0, 1]$, un elemento di $\bar{A}$.

Siccome $q_k \geq 1$, dalle disuguaglianze $0 \leq 1/\sqrt{kq_k} \leq 1/\sqrt{k}$ valide per $k \geq 1$ si deduce che

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{kq_k}}=0,$$

e dunque, per i teoremi sulle operazioni con i limiti, si deduce che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_k/q_k}+1+1/\sqrt{kq_k}} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

La funzione $f(x) = 1/(\sqrt{x}+1)$ è continua e decrescente nel suo dominio $[0,\infty)$ e quindi si ha

$$f((0,1]) = [f(1), f(0)) = [1/2, 1).$$

Questo prova che $[1/2,1) \subset \bar{A}$. Che risulti anche $1 \in \bar{A}$ si prova facendo il limite per $n \to \infty$ con m fissato nella definizione degli elementi di A.

Esercizio 3 Sia $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, consideriamo la funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1/x$, e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big|, \quad x, y \in X.$$

i) Provare che (X,d) è uno spazio metrico.

ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.

iii) Calcolare il completamento di (X,d).

Risoluzione. i) La condizione $d(x,y) \geq 0$ è verificata. Se, inoltre, $d(x,y) = 0$ allora $1/x - 1/y = 0$ e quindi $x = y$. La funzione d è simmetrica. Anche la disuguaglianza triangolare è verificata, in quanto

$$\Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y}\Big| \leq \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\Big| + \Big|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\Big|.$$

ii) La successione $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, è di Cauchy. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Proviamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge in X. Se $x \in X$, cioè $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, fosse il suo limite allora dovremmo avere

$$0 = \lim_{n\to\infty} d(a_n, x) = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\Big| = \frac{1}{|x|}$$

e questo non è possibile.

Osserviamo che anche la successione $b_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, è di Cauchy. Inoltre, la distanza

$$d(a_n, b_n) = d(n, -n) = \Big|\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\Big| = \frac{2}{n}$$

tende a 0 per $n \to \infty$ e quindi le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dovranno tendere allo stesso limite nel completamento.

iii) Per costruire il completamento di X dobbiamo aggiungere un punto. Come punto da aggiungere si può scegliere $0 \in \mathbb{R}$ ed estendere in modo opportuno la distanza d su tutto $\mathbb{R}$. Estendiamo la funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ su tutto $\mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ora estendiamo la distanza ponendo $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ è completo (è chiaro che $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è denso in $\mathbb{R}$ con la distanza d). Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ allora la successione $(\varphi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ con la distanza standard e quindi esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = b \in \mathbb{R}.$$

Siccome $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva, esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(a) = b$. A questo punto possiamo affermare che

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = \lim_{n\to\infty} |\varphi(a_n) - \varphi(a)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(a_n) - b| = 0.$$

In alternativa, per rispondere alla domanda iii) basta in effetti la seguente considerazione. La funzione $\varphi : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_S)$, dove d_S è la distanza standard su $\mathbb{R}$, è un'isometria e inoltre $\overline{\varphi(X)} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$ con chiusura nella distanza standard di $\mathbb{R}$. Quindi $(\mathbb{R}, d_S)$ è il completamento di (X, d).