Analisi Matematica 1 - Parte A
Soluzioni degli esercizi settimanali

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2020-21

Versione del 25 settembre 2020

Esercizio 1.6 parte (1) Sia $f: A \to B$ una funzione. Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha

$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$

Discutere il caso in cui f sia iniettiva.

Risoluzione.

$$x \in C \overset{\text{(def. di immagine)}}{\Longrightarrow} f(x) \in f(C) \overset{\text{def. di anti-immagine}}{\Longleftrightarrow} x \in f^{-1}(f(C)).$$

$$(\not\Longleftarrow \text{ in generale})$$

Questo prova: $C \subset f^{-1}(f(C))$. Mostriamo che l'inclusione può essere stretta. Siano $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1\}$. L'unica funzione è $f(1) = f(2) = 1$. Sia $C = \{1\}$.

Allora

$$f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\} \neq C.$$

Supponiamo ora che f sia iniettiva. Allora:

$$f(x) \in f(C) \overset{\text{def. immagine}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in C \text{ t.c. } f(x_0) = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 = x \text{ perché } f \text{ è 1-1.}$$

$$\Longrightarrow x \in C$$

Dunque se f è 1-1 si ha:

$$C = f^{-1}(f(C)).$$

□

Esercizio 1.7 Sia $f : \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in A \subset \mathbb{R}.$$

1) Determinare il dominio A. Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.

2) Stabilire se f è iniettiva. Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\})$.

Risoluzione. 1) Per l'esistenza della radice: $1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1$
$\iff |x| \leq 1$
$\iff x \in [-1,1]$.

Dunque $A = [-1,1]$.

Dato $y \in \mathbb{R}$, cerchiamo di trovare $x \in A$ tale che $f(x) = y$:

$$x - \sqrt{1-x^2} = y \iff \cancel{x + \sqrt{1-x^2}}$$

$$\iff x - y = \sqrt{1-x^2}.$$

Abbiamo una prima condizione: $x - y \geq 0$.

Con questa condizione:

$$x - y = \sqrt{1-x^2} \iff (x-y)^2 = 1-x^2$$
$$\iff x^2 - 2xy + y^2 = 1 - x^2$$
$$\iff 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$
$$\iff x^2 - xy + \frac{1}{2}(y^2-1) = 0,$$

Risolviamo in x col y fissato:

$$x_\pm = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2(y^2-1)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2}$$

L'esistenza della radice impone la nuova condizione $2-y^2 \geq 0$ ovvero $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Vediamo se le due radici rispettano $x-y \geq 0$.

- $$\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2} \geq y \iff y+\sqrt{2-y^2} \geq 2y$$
$$\iff \sqrt{2-y^2} \geq y$$

Se $y \leq 0$ la disequazione è verificata. Se $y > 0$ si passa ai quadrati:

$$\iff 2-y^2 \geq y^2$$
$$\iff 2 \geq 2y^2 \iff y^2 \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1.$$

Conclusione: La soluzione x_+ è accettabile per $-\sqrt{2} \leq y \leq 1$

- $$\frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2} \geq y \iff y-\sqrt{2-y^2} \geq 2y$$
$$\iff -\sqrt{2-y^2} \geq y.$$

Dunque deve essere $y \leq 0$, In questo caso:

$$\iff -y \geq \sqrt{2-y^2}$$
$$\iff y^2 \geq 2-y^2$$
$$\iff y^2 \geq 1$$

Conclusione: La soluzione x_- è accettabile per $-\sqrt{2} \leq y \leq -1$.

Esercizio: $x_+, x_- \in A = [-1,1]$.

Possiamo ora rispondere alle varie domande.

Per ogni $y \in [-\sqrt{2}, 1]$ abbiamo trovato almeno una $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = y$. Per gli altri y no.

Dunque

$$f(A) = [-\sqrt{2}, 1].$$

La funzione f non è iniettiva perché per ogni $y \in (-\sqrt{2}, -1]$ esistono $x_+, x_- \in [-1,1]$ distinti tali che $f(x_+) = f(x_-) = y$.

Le "fibre" sono fatte nel seguente modo:

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{x_+\} & \text{se } -1 < y \leq 1 \\ \{x_-, x_+\} & \text{se } -\sqrt{2} < y \leq -1 \\ \{x_- = x_+\} & \text{se } y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

$\square$

ESERCIZIO 1.8 Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| =$ Card (A) la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Risoluzione. Nel caso di due insiemi si ha

$$\circledast \qquad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Infatti in $|A| + |B|$ gli elementi di $A \cap B$ sono contati due volte.

Usando la formula $\circledast$ si trova:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup \underbrace{(B \cup C)}_{=D}| = |A| + |D| - |A \cap D| =$$

$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

distributiva

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

usata $\circledast$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \left\{ |A \cap B| + |A \cap C| - |\underbrace{(A \cap B) \cap (A \cap C)}_{= A \cap B \cap C}| \right.$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$\square$

Esercizio 1.9 parte 2 Provare per induzione che

$$\circledast \qquad \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Risoluzione. Per $n=1$ (base induttiva) si ha banale

$$\sum_{K=1}^{1} \frac{1}{K^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1,$$

(con "=")

Passo induttivo. Supponiamo vera la $\circledast$. Allora:

$$\sum_{K=1}^{n+1} \frac{1}{K^2} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

Per concludere bisogna vedere se

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(n+1)^2 - n - n(n+1)}{n(n+1)^2} \geq 0$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$(n+1)^2 - n - n(n+1) = \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{n} = 1 > 0 .$$

Quindi la disuguaglianza è verificata.

$\square$

ESERCIZIO 1.10 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il quoziente ed il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$.

Risoluzione. Dobbiamo calcolare i polinomi $s(x)$ ed $r(x)$ tali che

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$$

dove r ha grado al più $m-1$.

Usiamo la formula per il binomio di Newton:

$$(x+a)^n = \left((x+b) + (a-b) \right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+b)^k (a-b)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (x+b)^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (x+b)^k .$$

Definiamo quindi

$$s(x) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (x+b)^{k-m}$$ polinomio di grado $n-m$

$$r(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (x+b)^k$$ polinomio di grado $m-1$.

Si trova allora $p(x) = (x+b)^m s(x) + r(x)$.

□

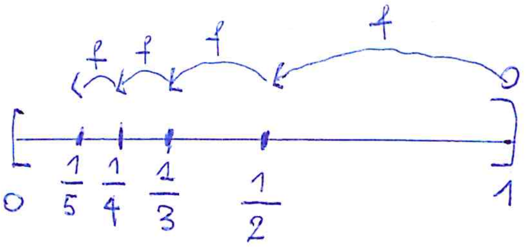
Esercizio 1,11 parte 1) Verificare che

$$\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$$

Bisogna esibire una bi-iezione concreta (esplicita).

Risoluzione. Consideriamo questo sottoinsieme di $[0,1]$

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \in [0,1] \; : \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \right\}$$



Su $[0,1] \setminus A$ consideriamo $f : [0,1] \setminus A \to [0,1] \setminus A$

$$f(x) = x \,, \quad \text{l'identità.}$$

Chiaramente è una corrispondenza biunivoca.

Poi definiamo $f : A \to A$ in questo modo

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \,.$$

Questa f è iniettiva, ma non suriettiva su A perchè $1 \in A$ non viene preso.

Complessivamente abbiamo costruito

$$f : [0,1] \to [0,1)$$

che è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCIZIO 1.12 Sia $\mathcal{A}$ un insieme i cui elementi sono intervalli $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < +\infty$.
Supponiamo che $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implichi che $I = J$ (ovvero, gli intervalli di $\mathcal{A}$ sono fra loro disgiunti). Provare che $\mathcal{A}$ è (al più) numerabile.

Risoluzione. Indichiamo con $|I| = |(a,b)| = b-a$ la lunghezza di I.

Introduciamo due parametri $n, k \in \mathbb{N}$.
Definiamo i sottoinsiemi:

$$\mathcal{A}_n = \{ I \in \mathcal{A} : I \subset [-n,n] \}$$

$$\mathcal{A}_{n,k} = \{ I \in \mathcal{A}_n : |I| \geq \frac{1}{k} \}.$$

Osserviamo che

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{n,k}.$$

L'insieme $\mathcal{A}_{n,k}$ è finito (contiene un numero finito di elementi) perché $[-n,n]$ contiene al più un numero finito di intervalli I con $|I| \geq \frac{1}{k}$ (ne contiene al massimo $n \cdot k$).

Dunque $\mathcal{A}_n$ è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Segue che $\mathcal{A}$ è numerabile (unione numerabile di numerabili). $\square$

ESERCIZIO 2,3 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato,

Provare che
$$\sup A - \inf A = \sup\{x-y \in \mathbb{R} : x,y \in A\}.$$

Soluzione. Chiamiamo $B = \{x-y \in \mathbb{R} : x,y \in A\}$.

1) Proviamo che $\sup A - \inf A \leq \sup B$.

Sia $z \in \mathbb{R}$ un maggiorante di B, ovvero:
$$x - y \leq z \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$
$$\Downarrow \quad y+z \text{ è maggiorante di } A$$
$$(\sup A) - y \leq z \quad \forall y \in A$$
$$\Downarrow \quad (\sup A) - z \text{ è minorante di } A$$
$$(\sup A) - (\inf A) \leq z.$$

E siccome $\sup B$ è il minimo dei maggioranti!
$$(\sup A) - (\inf A) \leq \sup B,$$

2) Proviamo che $\sup A - \inf A \geq \sup B$.

Siano z un maggiorante di A e w un minorante di A:
$$z \geq x \quad \forall x \in A,$$
$$w \leq y \quad \forall y \in A.$$

Deduciamo che $x - y \leq z - w$ da cui $z - w \geq \sup B$.

Scegliendo $z = \sup A$ e $w = \inf A$ si ottiene la tesi.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, \; 0 < x, y < 1 \right\}.$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

Soluzione. Certamente $\frac{xy}{x+y} > 0$ e dunque 0 è un minorante. Quindi $\inf A \geq 0$. Proviamo che $\inf A = 0$, ovvero che $\varepsilon > 0$ non è un minorante. Cerchiamo $x, y \in (0,1)$ tali che

$$\frac{xy}{x+y} < \varepsilon.$$

Proviamo con la scelta $x = y$:

$$\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2x} < \varepsilon.$$

Basta scegliere $x < 2\varepsilon$. Questo prova che $\inf A = 0$.

Cerchiamo di individuare $\sup A$: se $x, y \in (0,1)$:

$$\frac{xy}{x+y} = x \cdot \underbrace{\frac{y}{x+y}}_{\wedge \atop 1} < x \cdot 1 = x < 1.$$

Quindi 1 è un maggiorante (stretto) di A.
La stima fatta non è precisa perché $\frac{y}{x+y}$ è circa 1 quando x è circa 0.

Sappiamo che

$$0 < x < 1 \iff x^2 < x.$$

Dunque se $x, y \in (0,1)$ si ha $x+y > x^2+y^2$ e allora

$$\frac{xy}{x+y} < \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Infatti $2xy \leq x^2+y^2 \iff x^2+y^2-2xy \geq 0$
$\iff (x-y)^2 \geq 0 .$

Dunque $\frac{1}{2}$ è un maggiorante (stretto): $\sup A \leq \frac{1}{2}$.

Proviamo che $\sup A = \frac{1}{2}$. Dato $\varepsilon > 0$ cerchiamo $x, y \in (0,1)$ tali che $\frac{xy}{x+y} > \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Proviamo con il caso semplificato $x = y$:

$$\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2x} > \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

Dunque x deve verificare $x > 1 - 2\varepsilon$, che è una condizione compatibile con la definizione di A.

Questo prova che $\sup A = \frac{1}{2}$.

Abbiamo visto che $\frac{1}{2} \notin A$ e quindi non esiste max A.

Abbiamo visto che $0 \notin A$ e quindi non esiste min A. $\square$

<u>Commento</u> La funzione $x \longmapsto \frac{xy}{x+y} = \frac{y}{1+\frac{y}{x}}$ cresce nella $x \in (0,1)$ ed è massima per $x \to 1^-$.

Stessa cosa per $y \to 1^-$. Dunque è ragionevole che l'estremo superiore si ottenga inserendo i valori $x = y = 1$.

ESERCIZIO 2.5 Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Provare che se $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora anche $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluzione. Per assurdo sia $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{m}+\sqrt{n} = r$, ovvero

$$\sqrt{n} = r - \sqrt{m}.$$

Passando ai quadrati si ottiene

$$n = (r-\sqrt{m})^2 = r^2 + m - 2r\sqrt{m}$$

ovvero

$$2r\sqrt{m} = r^2 + m - n.$$

Siccome $r \neq 0$ si può dividere ed ottenere

$$\sqrt{m} = \frac{r^2+m-n}{2r} \in \mathbb{Q}.$$

Questo è assurdo.

$\square$

ESERCIZIO 2.10 Verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$[x] + [x + 1/n] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Soluzione. Se $z \in \mathbb{Z}$ è un numero intero allora:

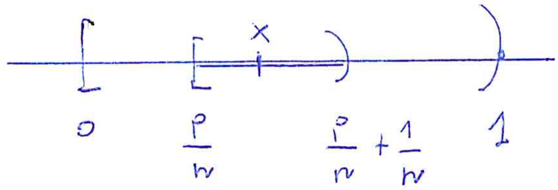
$$\left[z + x + \frac{i}{n}\right] = \left[x + \frac{i}{n}\right] + z$$
$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$[(z+x)\,n] = [zn + nx] = zn + [nx].$$

Deduciamo che basta risolvere il problema quando $x \in [0,1)$.

Sia $p = [nx]$. Allora $p \le nx < p+1$ e quindi

$$\frac{p}{n} \overset{*}{\le} x \overset{\triangle}{<} \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$$



Contiamo per quante $i = 0, 1, \dots, n-1$ si ha $x + \frac{i}{n} < 1$.

Per tutte queste i si ha $\left[x + \frac{i}{n}\right] = 0$. La disuguaglianza precedente fornisce:

$$\frac{i}{n} < 1 - x \le 1 - \frac{p}{n} \qquad (\text{usata la } *)$$

e dunque $i < n - p$.

Precisiamo meglio l'argomento. Affermiamo che

$$i \leq n-p-1 \quad \Longrightarrow \quad x+\frac{i}{n} < 1 .$$

Infatti

$$x+\frac{i}{n} \overset{\triangle}{<} \frac{p}{n}+\frac{1}{n}+\frac{i}{n} \leq \frac{p}{n}+\frac{1}{n}+\frac{n-p-1}{n} = 1$$

Poi affermiamo che

$$i \geq n-p \quad \Longrightarrow \quad x+\frac{i}{n} \geq 1 .$$

Infatti

$$x+\frac{i}{n} \overset{*}{\geq} \frac{p}{n}+\frac{i}{n} \geq \frac{p}{n}+\frac{n-p}{n} = 1 .$$

In conclusione

$$\underbrace{\underset{0}{\underset{\parallel}{[x]}}+\dots+\underset{0}{\underset{\parallel}{\left[x+\frac{n-p-1}{n}\right]}}}_{\text{ce ne sono } n-p}+\underbrace{\underset{1}{\underset{\parallel}{\left[x+\frac{n-p}{n}\right]}}+\dots+\underset{1}{\underset{\parallel}{\left[x+\frac{n-1}{n}\right]}}}_{\text{ce ne sono } p} = p$$

$\square$

ESERCIZIO 2.11 Sia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che $|x-y| \leq 10 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 10$. Determinare f.

Risoluzione. Per $x \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$I(x) = \{y \in \mathbb{Z} : |y-x| \leq 10\}.$$

Ad esempio $I(0) = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10\}$. Per ogni $x \in \mathbb{Z}$ si ha $\mathrm{Card}(I(x)) = 21$.

A meno di sostituire $f(x)$ con $f(x)-f(0)$, - che verifica le stesse proprietà di f - possiamo supporre che $f(0)=0$.

Deve essere $f(I(0)) \subset I(0)$, ed essendo $f: I(0) \to I(0)$ iniettiva allora è anche suriettiva.

Vogliamo capire chi è $f(1)$. Come sopra avremo che $f: I(1) \to f(I(1))$ è 1-1 e su. Analogamente avremo

$$\circledast \quad f: I(0) \cap I(1) \underset{su}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} f(I(0) \cap I(1)) = f(I(0)) \cap f(I(1))$$
$$= I(0) \cap f(I(1))$$

L'insieme $f(I(1))$ è fatto così:

$$f(I(1)) = \{f(1), f(1) \pm 1, f(1) \pm 2, \dots, f(1) \pm 10\}.$$

Dalla $\circledast$ segue che

$$20 = \mathrm{Card}(I(0) \cap I(1)) \Rightarrow 20 = \mathrm{Card}(I(0) \cap f(I(1))).$$

L'ultima cosa è possibile solo se $f(1) = \pm 1$, altrimenti la cardinalità è minore.

Studiamo il caso $f(1) = 1$. Dal fatto che

$$f : I(1) \cap I(2) \underset{su}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} f(I(1)) \cap f(I(2))$$

si deduce come sopra che $f(2) = 2$. Ora per induzione si prova che $f(n) = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ed in effetti $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dunque nel caso $f(1) = 1$ si trova $f(x) = x$.
Nel caso $f(1) = -1$ si trova $f(x) = -x$.

Tenuto conto della osservazione iniziale, deduciamo che f deve essere della forma

$$f(x) = \pm x + K$$

per una costante $K \in \mathbb{Z}$.

$\square$

ESERCIZIO 3.1 parte 4 Verificare che $\mathbb{R}$ con la funzione distanza

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

è uno spazio metrico.

Risoluzione. 1) Certamente $d(x,y) \geq 0 \;\; \forall x,y \in \mathbb{R}$.
Se poi $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = 0$ allora $|x-y| = 0$ e quindi $x = y$. Siccome $|x-y| = |y-x|$ la distanza è simmetrica. Verifichiamo la disuguaglianza triangolare:

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}.$$

Questa disuguaglianza è equivalente a quella che si ottiene passando ai quadrati

$$|x-y| = \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \leq \left(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\right)^2 =$$

$$= |x-z| + 2\sqrt{|x-z||z-y|} + |z-y|.$$

Questa disuguaglianza è verificata in quanto

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

$$0 \leq 2\sqrt{|x-z||z-y|}.$$

$\square$

ESERCIZIO 3.4 Usando la definizione verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{e^{n/2}+e^{-n/2}}}{e^{n/4}} = 1.$$

Risoluzione. Fissiamo $\varepsilon>0$ e studiamo la disequazione

$$(*) \qquad \Big| \underbrace{\frac{\sqrt{e^{n/2}+e^{-n/2}}}{e^{n/4}} - 1}_{>0} \Big| < \varepsilon$$

che è equivalente a

$$\sqrt{e^{n/2}+e^{-n/2}} < (1+\varepsilon)\, e^{n/4}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{n/2}+e^{-n/2} < (1+\varepsilon)^2 e^{n/2}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + e^{-n} < (1+\varepsilon)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{-n} < (1+\varepsilon)^2 - 1 = 2\varepsilon+\varepsilon^2$$

$$\Updownarrow$$

$$-n < \log(2\varepsilon+\varepsilon^2)$$

Quindi la ⊛ è equivalente a $n > -\log(2\varepsilon+\varepsilon^2)$.

Conclusione: fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\bar{n} > -\log(2\varepsilon+\varepsilon^2)$

si ha
$$\left| \frac{\sqrt{e^{n/2}+e^{-n/2}}}{e^{n/4}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n}.$$

$\square$

ESERCIZIO 3.7 Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Risoluzione. Consideriamo questi due punti di $\mathbb{R}^n$:

$$x = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}\right),$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Allora si ha:

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2}$$

$$|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{1/2}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}} = n.$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy - Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

si ottiene

$$n^2 = \langle x, y\rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

ESERCIZIO 38 Siano $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ numeri reali.

Provare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$(1-x_1) \cdots (1-x_n) < 1 - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Risoluzione. Per $n=2$ si ha

$$(1-x_1)(1-x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 \overset{?}{<} 1 - x_1x_2.$$

L'ultima disuguaglianza è equivalente a

$$x_1 + x_2 > 2x_1x_2.$$

Questa è verificata, in quanto $x_1 > x_1^2$ e $x_2 > x_2^2$ (essendo $0 < x_1, x_2 < 1$) ed inoltre

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$

essendo $(x_1-x_2)^2 \geq 0$.

Supponiamo vera la disuguaglianza per $n-1$ e proviamola per n:

$$(1-x_1) \cdot \ldots \cdot (1-x_{n-1}) \cdot (1-x_n) < (1 - x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})(1-x_n) =$$

$$= 1 - x_n - x_1 \cdots x_{n-1} + x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

Dobbiamo provare che $1 - x_n - x_1 \cdots x_{n-1} + x_1 \cdots x_n < 1 - x_1 \cdots x_n$,

ovvero

$$x_n + x_1 \cdots x_{n-1} \geq 2x_1 \cdots x_n.$$

Si procede come sopra usando

$$x_n^2 < x_n$$

$$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^2 < x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

e poi $(x_n - x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^2 \geq 0$.

$\square$

ESERCIZIO 3.9 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \dots + a_{n-1} < a_n$ per $n \geq 2$. Provare che esiste $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

Risoluzione. Proviamo per induzione che

$$(*) \qquad a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 > 2^{n-1} a_1$$

per ogni $n \geq 2$. Infatti, per $n = 2$ si ha

$$a_2 + a_1 > a_1 + a_1 = 2a_1.$$

Supponiamo vera l'affermazione per $n-1$ e proviamola per n:

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 > 2(a_{n-1} + \dots + a_1) > 2 \cdot 2^{n-2} a_1 = 2^{n-1} a_1.$$

Fine della prova per induzione.

Dalla $(*)$ segue che

$$a_n > a_{n-1} + \dots + a_1 \overset{(*)}{>} 2^{n-2} a_1 \qquad \forall n \geq 2.$$

Cerchiamo un numero $p > 1$ tale che

$$2^{n-2} a_1 > p^n \qquad \forall n \geq 2.$$

ovvero

$$2^{1-\frac{2}{n}} a_1^{\frac{1}{n}} > p \qquad \forall n \geq 2.$$

Osserviamo che:

① $\lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{2}{n}} a_1^{\frac{1}{n}} = 2$

② $2^{1-\frac{2}{n}} a_1^{\frac{1}{n}} > 1$ per ogni $n \geq 2$.

Dalla ① segue che $\overset{(\exists)}{} \quad 2^{1-\frac{2}{n}} a_1^{\frac{1}{n}} \geq \frac{3}{2} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Dalla ② segue che $\min\left\{ 2^{1-2/n} a_1^{1/n} : n = 2, \ldots, \bar{n}-1 \right\} > 1$

Quindi esiste $p > 1$ tale che $2^{1-2/n} a_1^{1/n} > p \;\; \forall n \geq 2$.

Siamo arrivati a questa affermazione:

$$a_n > p^n \quad \forall n \geq 2.$$

Per guadagnare anche il caso $n = 1$ basta fare in questo modo: si prende $q = \min\left\{ \frac{a_1+1}{2}, p \right\}$ e si verifica che $a_n > q^n \;\; \forall n \geq 1$.

□

ESERCIZIO 4.3 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n},$$

Risoluzione. Procediamo per confronto:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \underbrace{3\sqrt[n]{2}}_{\downarrow \atop 3}$$

Dunque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$,

(Il risultato è 3 perché 3 è maggiore di 2.)

$\square$

ESERCIZIO 4.4 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\ .$$

Risoluzione. Proveremo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Fissiamo $M>0$ arbitrario (per fissare le idee: $M \in \mathbb{N}$).

Allora:

$$n \geq M \implies n! \geq M\cdot(n-1)!$$

Se poi

$$n-1 \geq M \implies n! \geq M(n-1)! \geq M^2(n-2)!$$

Possiamo iterare $n-M+1$ volte arrivando a

$$n! \geq M^{n-M+1}(M-1)!$$

Passando alle radici:

$$\sqrt[n]{n!} \geq M \sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!}$$

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!} = 1$.

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!} \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

In definitiva:

$$\forall M \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } \sqrt[n]{n!} \geq \frac{M}{2}.$$

Questo significa che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

$\square$

ESERCIZIO 4.11 Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Risoluzione. Si ha $p_n(a_n) = 0$ e $p_{n+1}(a_{n+1}) = 0$.
Si deduce che

$$a_n^n + a_n^{n-1} + \dots + a_n = a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1}^n + \dots + a_{n+1}$$

e da qui segue che $a_{n+1} < a_n$.

Dunque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e positiva.
Dai teoremi noti segue che esiste finito

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R},$$

Vogliamo passare al limite nell'identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k = 1$$

Sappiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = -1 + \sum_{k=0}^{n} x^k = -1 + \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$= \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

Qui la formula precedente fornisce

$$\frac{a_n - a_n^{n+1}}{1 - a_n} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È certamente $a_n < 1$ $\forall n$ e quindi la formula è ben scritta. Di più: $a_n \leq a_1 < 1$ $\forall n$ e quindi

$$0 < a_n^{n+1} < a_1^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

Per confronto: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n+1} = 0$.

Dunque

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_n^{n+1}}{1-a_n} = \frac{L}{1-L}$$

da cui si ricava $L = \frac{1}{2}$.

$\square$

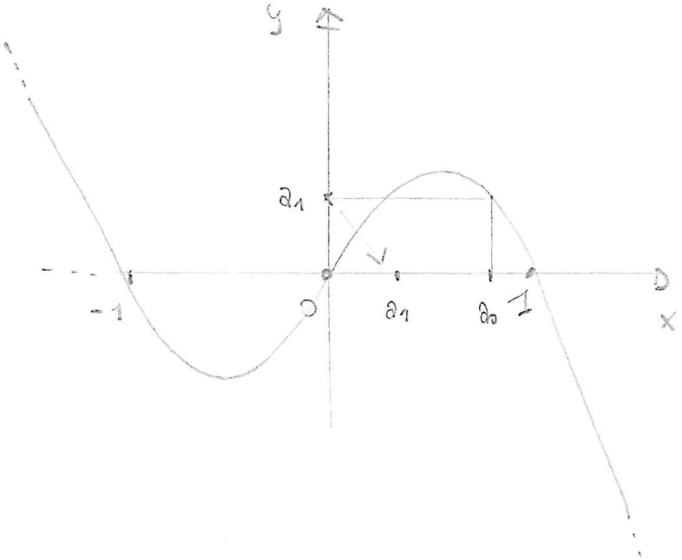
ESERCIZIO 5.5 Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$.
Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$ definiamo in modo ricorsivo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tramite

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1,1]$ la successione converge e calcolarne il limite.

2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

Risoluzione. Grafico di φ:



Per capire se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha proprietà di monotonia studiamo la disequazione $\varphi(x) \le x$ ovvero

$$x - x^3 \le x \iff x^3 \ge 0 \iff x \ge 0.$$

Deduciamo che:

$$a_n \ge 0 \implies a_{n+1} \le a_n$$

$$a_n \le 0 \implies a_{n+1} \ge a_n .$$

Dobbiamo quindi studiare il segno della successione. Per capirlo studiamo la disequazione $\varphi(x) \geq 0$, ovvero

$$x - x^3 \geq 0 \iff x(1-x^2) \geq 0$$

La tabellina è la seguente

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	$- - -$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
$1-x^2$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$	$- - -$
	$+ + +$	$- - -$	$+ + +$	$- - -$

(Come è anche evidente dal grafico fatto sopra).

Deduciamo le seguenti conclusioni

$$a_n \in [0,1] \Rightarrow a_{n+1} \geq 0$$
(e $a_{n+1} \leq a_n$, visto sopra)

$$a_n \in [-1,0] \Rightarrow a_{n+1} \leq 0$$
(e $a_{n+1} \geq a_n$, visto sopra).

Per induzione ora si prova che:

1. Se $a_0 \in [0,1]$ allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è positiva e decrescente
2. Se $a_0 \in [-1,0]$ allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è negativa e crescente.

In entrambi i casi esiste finito $L = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Passando al limite nella relazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \varphi(a_n)$$

si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = \varphi(L) = L - L^3$$

e quindi si trova $L^3 = 0$ ovvero $L = 0$.

2) Quando $a_0 \in [-1,1]$ la monotonia non è più chiara. Studiamo la successione $b_n := |a_n|$.

Avremo

$$b_{n+1} = |a_{n+1}| = |\varphi(a_n)| = |a_n - a_n^3| =$$

$$= |a_n|\,|1 - |a_n|^2| = b_n\,|1 - b_n^2|$$

Quindi dobbiamo considerare $\psi(x) = x\,|1-x^2|$ limitatamente a $x \geq 0$.

La monotonia di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è governata dalla disequazione $\psi(x) \leq x$ ovvero $x\,|1-x^2| \leq x$.

Per $x \geq 0$ questa è equivalente a

$$|1-x^2| \leq 1 \iff -1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

$$\iff x^2 \leq 2$$

$$\iff (0 \leq)\, x \leq \sqrt{2}$$

In modo analogo: $\varphi(x) < x \iff 0 < x < \sqrt{2}$.

Deduciamo che per $b_0 < \sqrt{2}$ la successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente (e positiva). Quindi ha limite. Il limite deve essere $= 0$:

$$0 = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} |a_n|$$

Questo implica che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Abbiamo provato questo:

$$|a_0| < \sqrt{2} \implies \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Quando $a_0 = \sqrt{2}$ si trova $a_1 = -\sqrt{2}$ etc.
$a_0 = -\sqrt{2}$ si trova $a_1 = +\sqrt{2}$ etc.

Dunque per $|a_0| = \sqrt{2}$ la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oscilla e non ha limite.

Per $b_0 = |a_0| > \sqrt{2}$ la successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Non può convergere ad un valore finito perché l'equazione $L = \varphi(L)$ ha le sole soluzioni $\overset{(\geq 0)}{\text{positive}}$ $L = 0$ ed $L = \sqrt{2}$.

Dunque $b_0 > \sqrt{2}$ implica che $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$.

Quindi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non può convergere per $|a_0| > \sqrt{2}$.

$\square$

ESERCIZIO 5.8   Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\}.$$

Soluzione.   Siccome $0 \leq \{\sqrt{n}\} < 1$ risulta certamente

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} \leq \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} \leq 1.$$

Se $n = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$ allora $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{m^2}\} = \{m\} = 0$

Questo prova che $\liminf_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 0$.

Proviamo che $\limsup_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 1$. Bisogna provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \ \exists\, n \geq \bar{n} \text{ tale che } \{\sqrt{n}\} > 1-\varepsilon.$$

Bisogna cercare di rendere massima $\{\sqrt{n}\}$.
Sui quadrati consecutivi m^2 ed $(m+1)^2$ la parte frazionaria è 0. Scegliamo l'intero più grande minore di $(m+1)^2$ ovvero

$$n = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$$

Allora $m \leq \sqrt{m^2+2m} < m-1$ e quindi

$$\{\sqrt{m^2+2m}\} = \sqrt{m^2+2m} - [\sqrt{m^2+2m}]$$
$$= \sqrt{m^2+2m} - m$$

da cui

$$\left\{ \sqrt{n^2+2n} \right\} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} .$$

Il suo limite è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1} = 1 .$$

Quindi $\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}\in\mathbb{N} \ \forall n\geq \bar{n}$ si ha

$$\left\{ \sqrt{n^2+2n} \right\} \geq 1-\varepsilon .$$

ESERCIZIO ~~5.8~~ 5.9 Sia $x \in]0,1[$ un numero reale.

Calcolare i seguenti

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\}$$

$$L^+(x) = \limsup_{n\to\infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\}$$

dove $\{\cdot\}$ è la parte frazionaria.
Stabilire per quali $x \in]0,1[$ la successione in esame ha limite.

Risoluzione. Siccome $0 \le \{x\} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, abbiamo che $\quad 0 \le L^-(x) \le L^+(x) \le 1.$

Partiamo da questa osservazione:

$$n \overset{\text{Chiaro}}{<} \sqrt{n^2+2nx} \overset{\circledast}{<} n+1 .$$

Verifico $\circledast$:

$$\sqrt{n^2+2nx} < n+1 \iff n^2+2nx < (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$\iff 2n(x-1) < 1$$

VERO perché $x-1<0$.

Ora distinguo questi due casi: 1) n pari; 2) n dispari

Quando n è pari:

$$\{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\} = \{\sqrt{n^2+2nx}\} = \sqrt{n^2+2nx} - n$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2nx} - n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2nx-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2nx}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{2x}{n}}+1} = \frac{2x}{2} = x .$$

Dunque la successione in esame ristretta agli indici pari ha limite.

Per gli indici dispari:

$$\left\{ (-1)^n \sqrt{n^2+2nx} \right\} = \left\{ -\sqrt{n^2+2nx} \right\}$$

In questo caso:

$$-(n+1) < -\sqrt{n^2+2nx} < -n$$

e quindi

$$\left\{ -\sqrt{n^2+2nx} \right\} = -\sqrt{n^2+2nx} - (-(n+1))$$

$$= n+1 - \sqrt{n^2+2nx}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - (n^2+2nx)}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}-2nx}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ - \sqrt{n^2+2nx} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1-x)+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2x}{n}}}$$

$$= \frac{2(1-x)}{2} = (1-x).$$

Dunque, sugli indici dispari la successione converge a $1-x$.

Conclusioni:

$$L^-(x) = \min\{x, 1-x\},$$

$$L^+(x) = \max\{x, 1-x\}.$$

Il limite esiste se e solo se $L^-(x) = L^+(x)$ ovvero $x = 1-x$ ovvero se e solo se $x = \frac{1}{2}$.

$\square$

ESERCIZIO 5.10 Sia $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ e consideriamo l'insieme
$$A = \{ e^{inx} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \} \subset S^1$$
dove $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.
Provare che i punti di accumulazione di A sono tutto S^1.

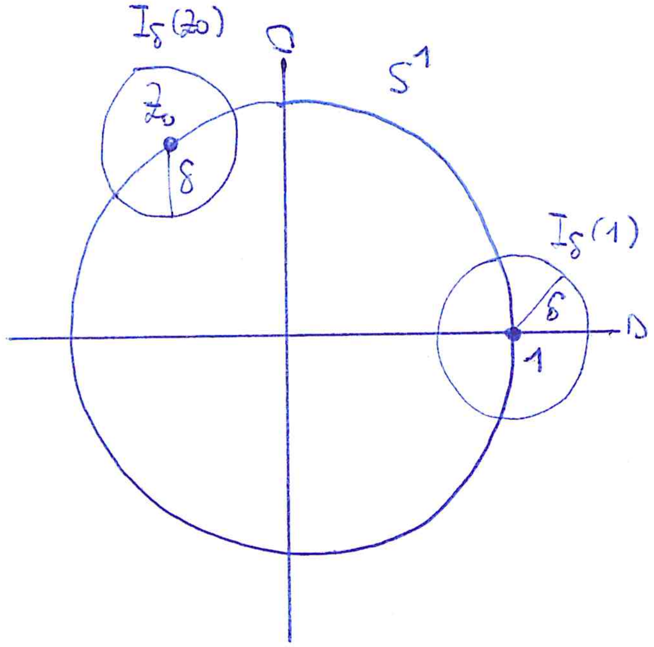
Risoluzione. ~~Fissato~~ Osserviamo che
$$m \neq n \implies e^{inx} \neq e^{imx}.$$
Se infatti fosse $e^{inx} = e^{imx}$ allora
$$1 = e^{inx - imx} = e^{i(n-m)x}$$
e quindi $(n-m)x = 2k\pi$, per un qualche $k \in \mathbb{Z}$
e quindi $x = \frac{k}{n-m} \cdot 2\pi \in 2\pi\mathbb{Q}$, assurdo.

Deduciamo che $\forall \delta > 0$ esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che
$$|e^{inx} - e^{imx}| < \delta.$$
[Provare in modo formale questa affermazione].

Ma allora
$$|e^{i(n-m)x} - 1| < \delta.$$
Questo prova che $1 \in S^1$ è un punto di

accumulazione di A. Sia ora $z_0 \in S^1$ e consideriamo

$$I_\delta(z_0) = \{ z \in S^1 \; : \; |z - z_0| < \delta \}$$



Sia $\bar{n} = n - m$. Allora $e^{i\bar{n}x} \in I_\delta(1)$. Abbiamo

$$\left| e^{i(k+1)\bar{n}x} - e^{ik\bar{n}x} \right| = \left| e^{i\bar{n}x} - 1 \right| < \delta .$$

Questo implica che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $e^{ik\bar{n}x} \in I_\delta(z_0)$.
Quindi $A \cap I_\delta(z_0) \neq \phi$.

$\square$

ESERCIZIO 6.2 ii) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}.$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto funzionano. Ma la cosa più semplice è il Confronto:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n < \infty$$

serie geometrica con ragione $\frac{4}{5} < 1$.

ESERCIZIO 6.3 ii) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n+1)}.$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto non sono utili perché $L=1$.

Partiamo da questa osservazione: per ogni $\alpha>0$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^\alpha} = 0$$

e quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n}$ si ha
$$\log(n+1) \leq n^\alpha$$

Dunque

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} n^{\alpha}} = +\infty$$

se scegliamo

$$\frac{1}{2} + \alpha \leq 1$$

Ad esempio $\alpha = 1/2$.
Per confronto la serie data diverge.

$\square$

ESERCIZIO 6.4 Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}} .$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto sembrano portare a limiti complicati che danno $L=1$.
Proviamo con dei confronti:

$$\log n! = \sum_{K=1}^{n} \log K \leq n \log n$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)^{\alpha}} .$$

Quando $\alpha = 1$ sappiamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$$

per il criterio di condensazione. Per confronto deduciamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha} = +\infty \qquad \forall \alpha \in]0,1].$$

Dobbiamo studiare il caso $\alpha > 1$. In questo caso si ha

$$\log n! = \sum_{K=1}^{n} \log K = \sum_{K=2}^{n} \log K \geq (n-1) \cdot \log 2$$

e quindi

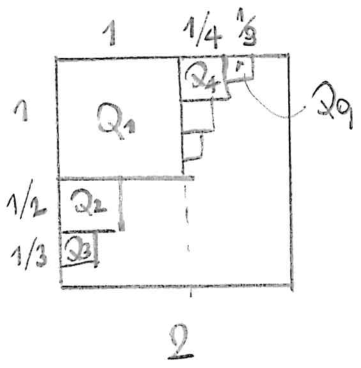
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha (n-1)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \forall \alpha > 1.$$

Per confronto la serie data converge $\forall \alpha > 1$.

Esercizio 6.6 Q = quadrato di lato 2
Mettere in Q quadrati Q_n di lato $1/n$
senza sovrapposizioni.

Soluzione. Primo tentativo:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \qquad \text{Vero}$$

I quadrati Q_{1/n^2} si allineano in orizzontale

In verticale: devo sommare $\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} =$

$$= \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k^2}\left(k^2+2k-k^2+1\right) =$$

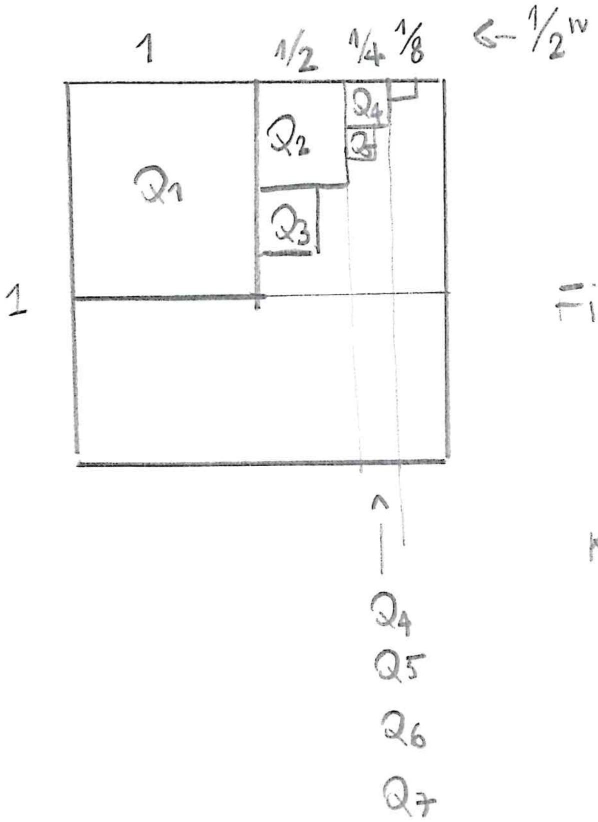
$$= \frac{2k+1}{k^2} \overset{?}{\leq} 2 \iff 2k+1 \leq k^2$$

Vero per $k \geq 3$

Per $k=1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$ Vero

$k=2$: $\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{\wedge\ 1/2} + \underbrace{\dots + \frac{1}{8}}_{\wedge\ 1/2} < 1$ Vero

Altra soluzione:



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Fisso n

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^n}\left(2^{n+1}-2^n\right) =$$

$$= (2-1) = 1 \qquad \text{OK}$$

Dunque i Q_n stanno in un Rettangolo di lati 1 e 2.

ESERCIZIO 6.8 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0$ e supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga.
Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-1/n}$ converge.

Risoluzione. Siano

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n \le \frac{1}{2^n} \right\}$$

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n > \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Allora $\mathbb{N} = A \cup B$ con unione disgiunta. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in A} a_n + \sum_{n\in B} a_n .$$

convergono

Ora si ha:

$$\sum_{n\in A} a_n^{1-\frac{1}{n}} \le \sum_{n\in A} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 2 \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n} < \infty .$$

Studiamo la somma su $n \in B$.

$$\frac{a_n^{1-\frac{1}{n}}}{a_n} = \frac{1}{a_n^{1/n}} \overset{\text{se } n\in B}{\le} 2$$

Dunque

$$\sum_{n\in B} a_n^{1-\frac{1}{n}} \le 2 \sum_{n\in B} a_n < \infty .$$

Mettendo insieme le cose: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{1-\frac{1}{n}} < \infty$. □

ESERCIZIO 6.9 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serie positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

converge se e solo se esiste finito il limite

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n .$$

Risoluzione. Supponiamo che sia $L\in\mathbb{R}$ e proviamo che la serie converge. È $L>0$ e dunque: $\exists\,\bar n\in\mathbb{N}\ \forall n\geq \bar n$ si ha

$$a_n\geq \frac{L}{2} .$$

Quindi

$$\sum_{n=\bar n}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=\sum_{n=\bar n}^{\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}\leq \frac{2}{L}\sum_{n=\bar n}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$$

$$=\frac{2}{L}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=\bar n}^{N}(a_n-a_{n-1})$$

$$=\frac{2}{L}\lim_{N\to\infty}\left(a_N-a_{\bar n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{L}\left(L-a_{\bar n-1}\right)<\infty ,$$

e dunque la serie converge.

Ora supponiamo che la serie converga e proviamo che il limite è finito:

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{S}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \overset{N\geq 1}{\geq} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a_N} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{a_N} (a_N - a_0) = 1 - \frac{a_0}{a_N},$$

e quindi $\frac{a_0}{a_N} \geq 1 - S$.

Se fosse $S < 1$ concludiamo che

$$a_N \leq \frac{a_0}{1-S} \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Tuttavia non sappiamo se $S < 1$.

Siccome la serie converge $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \overset{N\geq \bar{n}}{\geq} \sum_{n=\bar{n}}^{N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a_N} \sum_{n=\bar{n}}^{N} (a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{a_N} (a_N - a_{\bar{n}-1}) =$$

$$= 1 - \frac{a_{\bar{n}-1}}{a_N}$$

ed ora possiamo scegliere $\varepsilon \in]0,1[$

di modo che

$$a_N \leq \frac{a_{\bar{n}-1}}{1-\varepsilon} \qquad \forall\, N \geq \bar{n} \, .$$

$\square$

ESERCIZIO 7.3 i) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{n+1} .$$

Risoluzione. Per $x = -1$ la serie non è ben definita.

Se $\frac{x}{x+1} < 0$ si ha una serie con segno alterno.

Studiamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^4}{3^n} \left| \frac{x}{x+1} \right|^{n+1}}_{=: a_n \geq 0} ,$$

$(x \neq 0)$

Procediamo ad esempio con il criterio del Rapporto:

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \left| \frac{x}{x+1} \right|^{n+2} \cdot \frac{3^n}{n^4} \left| \frac{x+1}{x} \right|^{n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

1° caso: $L(x) = \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right| < 1$. La serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

2° caso: $L(x) > 1$. In questo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n}\left|\frac{x}{x+1}\right|^{n+1} = +\infty \neq 0$$

e quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente.

Risolviamo la disequazione

$$\frac{1}{3}\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \overset{x\neq -1}{\iff} |x| < 3|x+1|$$

$$\iff x^2 < 9(x^2+2x+1)$$

$$\iff 8x^2+18x+9 > 0$$

Le radici di $8x^2+18x+9=0$ sono $x_\pm = \frac{-9\pm\sqrt{81-72}}{8} = \frac{-9\pm 3}{8} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

Dunque $L(x)<1 \iff x \in]-\infty,-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{4},\infty[$.

Quando $x=-3/2$ o $x=-3/4$ allora $L(x)=1$.

Inoltre:

$$\frac{x}{x+1} \overset{x=-\frac{3}{2}}{=} \frac{-3/2}{-\frac{3}{2}+1} = 3, \qquad \frac{x}{x+1} \overset{x=-3/4}{=} \frac{-3/4}{-\frac{3}{4}+1} = -3$$

Dunque la serie iniziale diventa per $x=-3/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4\cdot 3 = +\infty.$$

$\square$

Per $x=-3/4$ è analogo.

ESERCIZIO 7.4 1) Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}} \right).$$

Risoluzione. Usiamo il criterio del Confronto Asintotico. Cerchiamo $\gamma > 0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \underset{0}{\underset{\#}{L}} \in \mathbb{R}$$

Siano $x = \sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}}$ e $y = \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}$. Allora

$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x+y} = \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}}{\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} + \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}}$$

Sia ora $z = \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}$, $w = \left(1+\frac{\beta}{n}\right) = \sqrt[3]{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}$

Allora

$$z - w = \frac{z^3 - w^3}{z^2 + zw + w^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\beta}{n}\right) + \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n^2} - 3\frac{\beta}{n} - 3\frac{\beta^2}{n^2} - \frac{\beta^3}{n^3}}{\ldots}$$

Ci sono ora due casi:

Caso 1: $2\alpha - 3\beta \neq 0$.

In questo caso
$$z - w = \frac{\frac{2\alpha - 3\beta}{n} + \text{Resto}}{\dots}$$

In questo caso bisogna scegliere $\gamma = 1$
e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{2\alpha - 3\beta}{3 \cdot 2} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} \neq 0$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ deduciamo che per $2\alpha \neq 3\beta$
la serie data diverge.

Caso 2: $2\alpha = 3\beta$.

In questo caso:
$$z - w = \frac{(\alpha^2 - 3\beta^2)\frac{1}{n^2} - \frac{\beta^3}{n^3}}{\dots}$$

In questo caso bisogna scegliere $\gamma = 2$!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\alpha^2 - 3\beta^2}{3 \cdot 2} \neq 0$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, la serie data converge. $\square$

Esercizio, 7.6 Provare che $e \notin \mathbb{Q}$

Per $m > 1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} + \frac{m}{m!\,(m-1)}$$

Per assurdo sia $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} < \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1}{m!} = \frac{1}{(m-1)!\,(m-1)}$$

Moltiplico per $(m-1)!$

$$0 < (m-1)!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{m-1}$$

Per $m \geq q+1$:

$$0 < \underbrace{(m-1)!\,\frac{p}{q}}_{\text{intero}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!}}_{\text{intero}} < \frac{1}{m-1} \underset{(m>2)}{<} 1 .$$

Questo è impossibile. $\square$

ESERCIZIO 7.8 Sia $0 < a < 1$.

i) Definita $a_n \in]-1,0[$ come $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ provare che

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1-a}{a}\right)$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}$$

Risoluzione. Partiamo da ii). Certamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1} = 0$$

La monotonia è tuttavia difficile da capire.
Non si riesce ad usare direttamente il Criterio di Leibniz.

Usando il punto i) si trova:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log^2 n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{\log^2 n+1}$$

Vero se entrambe le serie convergono.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n+1}$ converge per il Criterio di Leibniz.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1}$$

converge assolutamente. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n+1)}$$

converge per il criterio di Abel-Dirichlet.

i) Partendo da $\sqrt[n]{a} = 1+a_n$ si trova $a=(1+a_n)^n$ e per la Disuguaglianza di Bernoulli:

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n = \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \geq 1 - n\frac{a_n}{1+a_n}$$

Riordinando si trova:

$$-a_n \leq \frac{1-a}{na+1+a} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

$\square$

ESERCIZIO 7.9 Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x>0$, si ha:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n} = 1 - 2\{x\}.$$

Soluzione

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_k}{2^k} \qquad \alpha_k \in \{0,1\}$$

def $\alpha_k = 0$

$k \leq \bar{k} \in \mathbb{Z}$

Rappresentazione Binaria

$$[2^n x] = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n-k} \alpha_k\right] = \sum_{k \leq n} \alpha_k \, 2^{n-k}$$

$$(-1)^{[2^n x]} = (-1)^{\alpha_n} = \begin{cases} 1 & \alpha_n = 0 \\ -1 & \alpha_n = 1 \end{cases}$$

$$= 1 - 2\alpha_n$$

Dunque

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2\alpha_n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = 1 - 2\{x\}$$

ESERCIZIO 8.4 Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$

$$A = \{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N} \}.$$

Risoluzione. Gli elementi di A sono fatti così:

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{n-m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Scegliamo n, m dipendenti da $k \in \mathbb{N}$ con parametri:

$$n - m = \alpha k \qquad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

e quindi $n = m + \alpha k$. Allora:

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{\alpha k}{\sqrt{m+\alpha k} + \sqrt{m}}$$

Ora scegliamo m dominante rispetto a k. Ad es.:

$$m = \beta^2 k^2 \qquad \text{con} \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{\alpha k}{\sqrt{\beta^2 k^2 + \alpha k} + \beta k} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \frac{\alpha}{k}} + \beta} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{\alpha}{2\beta}$$

Dunque tutti i punti del tipo $\frac{\alpha}{2\beta}$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta \in \mathbb{N}$ sono di accumulazione per A.

Dunque tutti i punti di $\mathbb{Q}$ sono di accumulazione per A. A questo punto dovrà essere pure vero che tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono di accumulazione per A. Infatti: sia $x \in \mathbb{R}$ e siano $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ e $\beta_k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{\alpha_k}{2\beta_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$$

Scegliamo $m_k = \beta_k^2 k^2 \in \mathbb{N}$ e poi $n_k = m_k + \alpha_k k$ $\underset{\mathbb{N}}{\cap}$ per k grande.

Allora

$$\sqrt{n_k} - \sqrt{m_k} = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\beta_k^2 + \frac{\alpha_k}{k}} + \beta_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha_k}{\beta_k^2}\frac{1}{k}} + 1} \xrightarrow[k\to\infty]{} x.$$

Infatti $\frac{\alpha_k}{\beta_k^2}\frac{1}{k} = \underset{\substack{\wedge\\ 1}}{\left(\frac{1}{\beta_k}\right)} \underset{\substack{\downarrow\\ 2x}}{\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\left(\frac{1}{k}\right)} \longrightarrow 0.$ $\square$

8,7

ESERCIZIO ~~8.8~~ Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n\to\infty} \sin(n) \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \sin(n).$$

Risoluzione. Sappiamo che

$$\sin(n) = \mathrm{Im}\,(e^{in})$$

Qui abbiamo (vedi es. precedente) $x = 1 \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Q}$.

Siccome $i \in S^1$ è punto di accumulazione di

$$A = \{e^{in} \in \mathbb{C} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$$

deduciamo che

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(n) = 1.$$

Siccome $-i \in S^1$ è p.to di accumulazione di A segue che

$$\liminf_{n\to\infty} \sin(n) = -1.$$

Abbiamo dimostrato di più: $\forall L \in [-1,1]$ esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \sin(n_k) = L.$$

ESERCIZIO 9.11 Provare che:

1) la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

2) La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Risoluzione. 1) Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che: ($\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:)

$$|x-y| < \delta \implies \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| < \varepsilon .$$

Facciamo le seguenti stime:

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| = \frac{\big| |x| - |y| \big|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} .$$

Ora osserviamo che

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x-y|}$$

infatti passando ai quadrati:

$$|x| + 2\sqrt{|xy|} + |y| \geq |x-y|$$

che è vero in quanto $|x-y| \leq |x| + |y|$.

In definitiva abbiamo che

$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ con la scelta $\cancel{\delta \leq \sqrt{\varepsilon}}$ $\delta = \varepsilon^2$ vale che

$$|x-y| < \delta \implies \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| < \varepsilon.$$

$\square$

2) Dobbiamo provare che $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, \delta > 0$ esistono punti $x,y \in \mathbb{R}$ tali che $|x-y| < \delta$ MA $|x^2-y^2| \geq \varepsilon$.

Proviamo con $\varepsilon = 1$. Abbiamo

$$\left|x^2-y^2\right| = \left|(x-y)(x+y)\right| = |x-y| \cdot |x+y|.$$

Cerchiamo punti $x,y > 0$ con $x > y$, di modo che

$$|x^2-y^2| = (x-y)(x+y).$$

Sia $\delta > 0$ arbitrario e imponiamo $x-y < \delta$ ovvero $x < y+\delta$. Possiamo scegliere $x = y + \delta/2$

Quindi

$$|x^2-y^2| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(2y + \frac{\delta}{2}\right)$$

Abbiamo ancora la libertà di scegliere $y > 0$.

Possiamo imporre la condizione

$$\frac{\delta}{2}\left(2y + \frac{\delta}{2}\right) \geq \varepsilon = 1$$

ovvero $$y \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}.$$

$\square$

ESCIZIO ~~10.5~~ 11.6 Siano $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed $A \subset \mathbb{R}$.

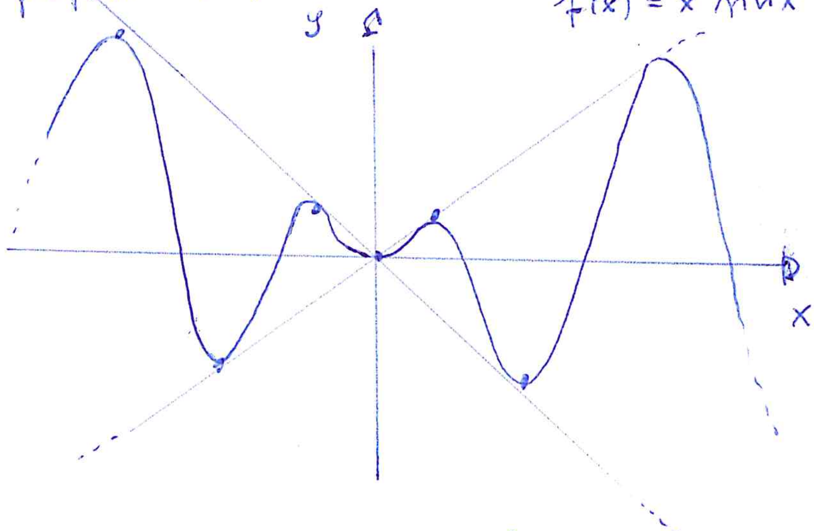
i) $f(A) \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ aperto. Vero o falso?

ii) $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow$ $f(A) \subset \mathbb{R}$ aperto. Vero o falso?

Risoluzione. i) È falso. Si consideri questa funzione

$$f(x) = x \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è:



L'insieme $A = [0, \infty)$ è chiuso e non è aperto.
Tuttavia si ha $f(A) = \mathbb{R}$ che è aperto.
Questo è un controesempio alla affermazione i).

ii) È falso. Si consideri la funzione $f(x) = \sin x$ ed $A = \mathbb{R}$, che è aperto. Tuttavia $f(A) = f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ che è chiuso e non aperto. Questo è un controesempio a ii). $\square$

Commento. Rispondere alle domande i) e ii) sotto le ipotesi che f sia continua e monotona.

ESERCIZIO ~~10.6~~ 11.7 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ~~continua~~ e si consideri l'insieme ("epigrafico")

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1) f continua $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Vero o falso?

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow$ f continua. Vero o falso?

Risoluzione. 1) É vero. Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

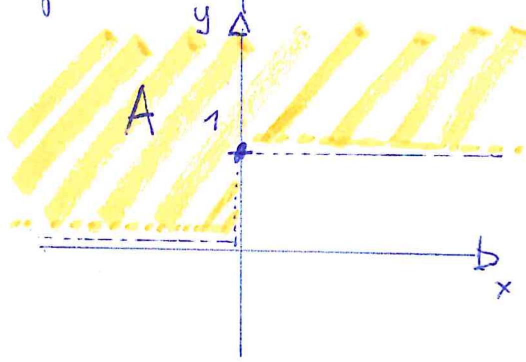
$$F(x,y) = y - f(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

É continua da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni continue. Inoltre,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) > 0\} = F^{-1}(]0,\infty[)$$

è aperto essendo preimmagine continua di un aperto.

2) É falso. Si consideri la seguente funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

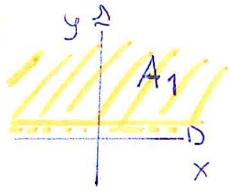


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

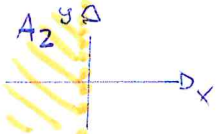
f non è continua nel punto $x = 0$ (c'è una discontinuità di "salto").

Adesso proviamo che $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x) \}$ è aperto. Consideriamo questi tre insiemi:

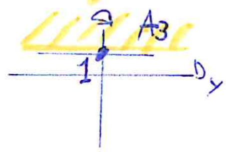
$$A_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \} \quad \text{è aperto}$$



$$A_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \} \quad \text{è aperto}$$



$$A_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 \} \quad \text{è aperto}$$



Allora si ha:

$$A = \underbrace{\underbrace{\overset{\text{intersezione di due aperti}}{(A_1 \cap A_2)}}_{\text{aperto}} \cup \underset{\text{aperto}}{A_3}}_{\text{aperto in quanto unione di aperti}}$$

$\square$

ESERCIZIO 11.13. Provare che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ aperto è unione numerabile di intervalli aperti.

Risoluzione. L'insieme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è numerabile.
Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ consideriamo

$$\mathcal{A}_q = \{ I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo aperto tale che } q \in I \text{ e } I \subset A \}$$

e definiamo

$$I_q = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_q} I .$$

Allora:

1) Se $q \in A$ allora $\mathcal{A}_q \neq \emptyset$ e quindi $I_q \neq \emptyset$

2) I_q è aperto in quanto unione di aperti

3) I_q è un intervallo. Facile da provare (Esercizio).

Siano ora $p, q \in \mathbb{Q} \cap A$, e supponiamo che $I_p \cap I_q \neq \emptyset$.
Allora $I_p \cup I_q$ è un intervallo che contiene sia p che q, è aperto e contenuto in A. Dalla definizione di I_p ed I_q:

$$I_p \cup I_q \subset I_p \implies I_q \subset I_p$$

$$I_p \cup I_q \subset I_q \implies I_p \subset I_q$$

Quindi $I_p = I_q$.

In conclusione, dati $p, q \in \mathbb{Q} \cap A$ ci sono solo due casi:

Caso 1: $I_p \cap I_q = \emptyset$ (intervalli disgiunti)

Caso 2: $I_p = I_q$ (intervalli coincidenti).

Diciamo che $p \sim q$ se $I_p = I_q$. É una relazione di equivalenza. Il quoziente

$$A \cap \mathbb{Q}/_{\sim} = \{ [q] \; ; \; q \in A \cap \mathbb{Q} \}$$

è finito o numerabile, poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Dunque

$$\bigcup_{[q] \in A \cap \mathbb{Q}/_{\sim}} I_q \overset{\circledast}{\subset} A$$

è un'unione disgiunta, finita o numerabile.

Proviamo che in $\circledast$ c'è "=".

Se $x \in A$ aperto esiste $q \in A \cap \mathbb{Q}$ tale che $[x, q] \subset A$ perché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è denso. Quindi $[x, q) \subset I_q$ ed in particolare $x \in I_q$.

$\square$

ESERCIZIO 12.~~4~~ 3 Sia (X,d) uno spazio metrico completo.
Sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi tali che

1) $K_{n+1} \subset K_n \neq \emptyset$

2) $\operatorname{diam} K_n := \sup\limits_{x,y\in K_n} d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Provare che esiste $x\in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Risoluzione. Sia $x_n \in K_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.
Proviamo che la successione è di Cauchy.
Se $m \geq n$ allora $x_m, x_n \in K_n$ perché $K_m \subset K_n$.
dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} K_n < \varepsilon \quad \text{per } n \geq \bar{n}.$$

Quindi esiste $x\in X$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

$$\left.\begin{array}{l} x_m \in K_n \ \forall m \geq n \\ x_m \to x \\ K_n \text{ chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in K_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

La conclusione è che $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.
Se poi $x,y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ allora $d(x,y) \leq \operatorname{diam} K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
da cui: $d(x,y) = 0$, ovvero $x = y$.

ESERCIZIO 12.~~6~~ 5 Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva.

Definiamo $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$:

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

1) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico

2) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è completo se e solo se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso (nel topologia standard).

Risoluzione. 2) Sia $(\mathbb{R}, d)$ completo e proviamo che $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \bar{x}$, per punti $x_n \in \mathbb{R}$.

Dunque $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ con la distanza standard. Ovvero: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ perché $d(x_n, x_m) = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)|$.

Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ovvero

$$= \lim_{n \to \infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| = 0$$

$$= |\bar{x} - \varphi(x)| \implies \bar{x} = \varphi(x)$$

ovvero $\bar{x} \in \varphi(\mathbb{R})$.

Questo prova che $\varphi(\mathbb{R}) = \overline{\varphi(\mathbb{R})}$.

Supponiamo ora che $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ sia chiuso e proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ è completo.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$. Ovvero:

$(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ con distanza standard.

Per completezza di $\mathbb{R}$ standard:

$$\underset{\varphi(\mathbb{R})}{\overset{\varphi(x_n)}{\cap}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \bar{x} \in \mathbb{R}$$

Ma $\varphi(\mathbb{R})$ e chiuso e $\bar{x} \in \overline{\varphi(\mathbb{R})} = \varphi(\mathbb{R})$, quindi esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\bar{x} = \varphi(x)$. Ma allora

$$d(x_n, x) = |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

$\square$