Analisi Matematica 1 Foglio 5

Funzioni 31 ottobre 2012

Esercizio 1. Determinare il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

$$\text{i) } f(x) = \log\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1\right); \quad \text{ii) } g(x) = \left(\frac{17\pi}{8}\arcsin(x/2) - \arcsin^2(x/2) - \frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}.$$

Risposte: i) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; ii) $D(g) = [\sqrt{2-\sqrt{2}}, 2]$.

Esercizio 2. Sia $f : [0, \infty) \to [0, 1)$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

i) Verificare che f è strettamente crescente (e quindi iniettiva) nel dominio dato.
ii) Verificare che f è suriettiva su $[0, 1)$.
iii) Calcolare l'espressione analitica della funzione inversa $f^{-1} : [0, 1) \to [0, +\infty)$.
iv) Disegnare un grafico approssimativo di f e di f^{-1}.
Risposte: iii) $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$.

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\arctan(|x|)}.$$

Determinare $\inf\limits_A f$ e $\sup\limits_A f$. Stabilire se esistono $\min\limits_A f$ e $\max\limits_A f$.
Risposte: $\sup\limits_A f = \infty$ e $\inf\limits_A f = 2/\pi$.

Esercizio 4. Determinare se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$\text{i) } f(x) = \frac{\arctan(x^3)\cos(\pi - x)}{\cosh(x)\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{ii) } g(x) = \frac{e^{-x^2}\cos(x)}{|1-x| + |1+x|}.$$

Esercizio 5. Usando esclusivamente le proprietà delle funzioni elementari, determinare se – nei domini specificati – le seguenti funzioni sono (strettamente) crescenti o decrescenti:

i) $f(x) = \sin(x^2) + \sqrt{1+x^2}, \quad x \in [0, \sqrt{\pi/2}]$;

ii) $g(x) = \arctan\left(2^{-x} - 3^x\right), \quad x \in \mathbb{R}$;

iii) $h(x) = \log(1-x^2)$, A) $x \in (-1,1)$, B) $x \in (-1,0]$, C) $x \in [0,1)$.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione senoiperbolico $f(x) = \sinh(x)$.
i) Verificare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente (e quindi iniettiva) e suriettiva.
ii) Detta $f^{-1}(y) = \text{settsinh}(y)$ la funzione inversa, verificare che

$$\text{settsinh}(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2}).$$