Analisi Matematica 1 — Foglio 6

Limiti di funzione — 15 novembre 2012

Esercizio 1. Usando la definizione di limite verificare che

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^4}=-\infty,\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}=2.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\Big);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2},\ \text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R};\quad 5)\ \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0},\ \text{dove } x_0>0;$$

Risposte: 1) -1; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(2x)\log x+x\mathrm{e}^x+\cosh(2x)}{\mathrm{e}^x\cosh(x)\log(x+1)+x^2\sinh x};\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 2^x+x^3 3^x+x^4 4^x}{3^x\log(1+3^x)+(x^2 2^x+2)^2+1}.$$

Risposte: 1) 1; 2) 1.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\arctan\Big(\log\Big(\frac{x^2}{x+1}\Big)\Big);\quad 2)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh\left(\log(x^2+1)\right)}{x^\alpha},\quad \text{con } \alpha>0;$$

$$3)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{1-x};\quad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}+x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2},\quad \text{con } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Risposte: 1) $\pi/2$; 2) $1/2$ se $\alpha=2$; 3) ∞; 4) α.

Esercizio 5. Sviluppare le seguenti funzioni per $x\to 0$ con una precisione fino al terzo ordine:

1) $f(x)=\mathrm{e}^{\sinh x}-\sqrt{1+x^2}$;

2) $g(x)=\cosh\sqrt{x}+\sin^3 x-\mathrm{e}^{x/2}$, $x\geq 0$.

Risposte: 1) $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$; 2) $g(x)=-\frac{1}{12}x^2+\frac{353}{360}x^3+o(x^3)$.

Esercizio 6. Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
1) $f(x) = \log(1+x)^2 - \sin(2x) + \sin(x^2)$;
2) $g(x) = \cos x + \cosh x - \frac{1}{12}\sin(x^4) - 2$.
Risposte: 1) L'ordine di f è 3; 2) L'ordine di g è 8.

Esercizio 7. Usando sviluppi infinitesimali, calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{x^2} + 4\sqrt{x}\log(1+x)}{\cos(x^3) - 1 + \tan(x)\sin(\sqrt{x})}; \quad 2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sqrt{x^5})^{1/3} - 1}{x^2(\cos(x^{1/4}) - 1)}; \quad 3)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - \cos x}{\sin(x\log x)}.$$

Risposte: 1) 4; 2) $-2/3$; 3) 1.

Esercizio 8. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sin(1/n^\alpha)\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{1+1/n^2} - \cos(1/n)\right).$$

Risposte: 1) Converge se e solo se $\alpha > 1/2$ (Confronto asintotico); 2) Converge se e solo se $\alpha < 1$.