ANALISI MATEMATICA 1 - 2012 - 2013

LEZIONE 1

Simboli logici

$\exists$ Esiste

$\forall$ per ogni

$\Longrightarrow$ implica

$\Longleftrightarrow$ se e solo se

Sistemi numerici

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ numeri interi

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,;\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ dove $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Longleftrightarrow ps = qr$

numeri razionali

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{C} = \{x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$ numeri complessi, dove $i = \sqrt{-1}$

Insiemi

$x \in A$ x è elemento di A, $x \notin A$ x non è elemento di A

$A \subset B$ A è sottoinsieme di B

$A \cup B$ Unione

$A \cap B$ Intersezione

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ Differenza

Intervalli

$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$ Intervallo aperto

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x \leq b\}$ Intervallo chiuso

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x < b\}$

$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x - x_0| < \delta\}$ intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $\delta > 0$.

Numeri Naturali

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Principio di Induzione. Sia $P(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

(1) $P(1)$ è vera; (BASE INDUTTIVA)

(2) $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (PASSO INDUTTIVO)

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 1
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esempio 2 (Disuguaglianza di Bernoulli).
Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Esempio 3 (Somma geometrica parziale). Per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, si ha
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Qui: convenzione $x^0 = 1$.

Esempio 4 (Binomio di Newton) Per $x, y \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$:

$$B(n) \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Fattoriale Per induzione definiamo $n!$:

(1) $0! = 1$ e $1! = 1$

(2) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Ovvero: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Coefficienti Binomiali Per $k, n \in \mathbb{N}$ (anche $k = n = 0$) tali che $k \leq n$ definiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} .$$

"n su k"

Esercizio Provare che

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} .$$

Prova della formula $B(n)$.

(1) Base induttiva:

$B(1)$ $$(x+y) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^{k} = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y$$

$$= x + y \qquad \text{VERO}$$

(2) Passo induttivo. Supponiamo vera $B(n)$ e proviamo $B(n+1)$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k$$

$$= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k .$$

$\square$

LEZIONE 3

Esercizio 1 Verificare che l'insieme

$$A = \{ 2n - n^2 \in \mathbb{R} \, ; \, n \in \mathbb{N} \}$$

non è inferiormente limitato.

Soluzione. Dobbiamo provare che $\inf A = -\infty$, ovvero che A non ha minoranti:

$$\forall M > 0 \quad \exists x \in A \;:\; x < -M$$

ovvero

(**) $\quad \forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \;:\; 2n - n^2 < -M$.

La disequazione

(*) $\qquad x^2 - 2x - M > 0, \qquad x \in \mathbb{R},$

si risolve in modo esatto, le radici dell'equazione $x^2 - 2x - M = 0$ sono

$$x_\pm = 1 \pm \sqrt{1+M}$$

Le soluzioni di (*) sono $x < x_-$ oppure $x > x_+$. Dunque un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > 1 + \sqrt{1+M}$$

verifica $2n - n^2 < M$.

Questo prova la (**), e quindi $\inf A = -\infty$. $\square$

Esercizio 2 Sia $A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} \mid 0 < x, y < 1 \right\}$.

Dire se esistono ed eventualmente calcolare

sup A, max A, inf A e min A.

Soluzione. Cerco di capire se A è superiormente limitato: Osservo che

$$\frac{xy}{x+y} \underset{\uparrow}{<} \frac{x}{x+y} < 1$$ inquanto $y>0$ e $x>0$.

inquanto $0<y<1$

Dunque 1 è un maggiorante di A.

Per l'Assioma di completezza sup A esiste finito.

Per chiarirmi le idee scelgo $x=y$:

$$\frac{xy}{x+y} \overset{\text{se } x=y}{=} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{per } x<1$$

Ipotizzo che $\sup A = \frac{1}{2}$ e cerco di provarlo.

Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $x, y \in (0,1)$ tali che

$$\frac{xy}{x+y} > \frac{1}{2} - \varepsilon$$