Esercizio Determinare il dominio e disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Soluzione. $D(\arcsin) = [-1,1]$ e $\sin x \in [-1,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

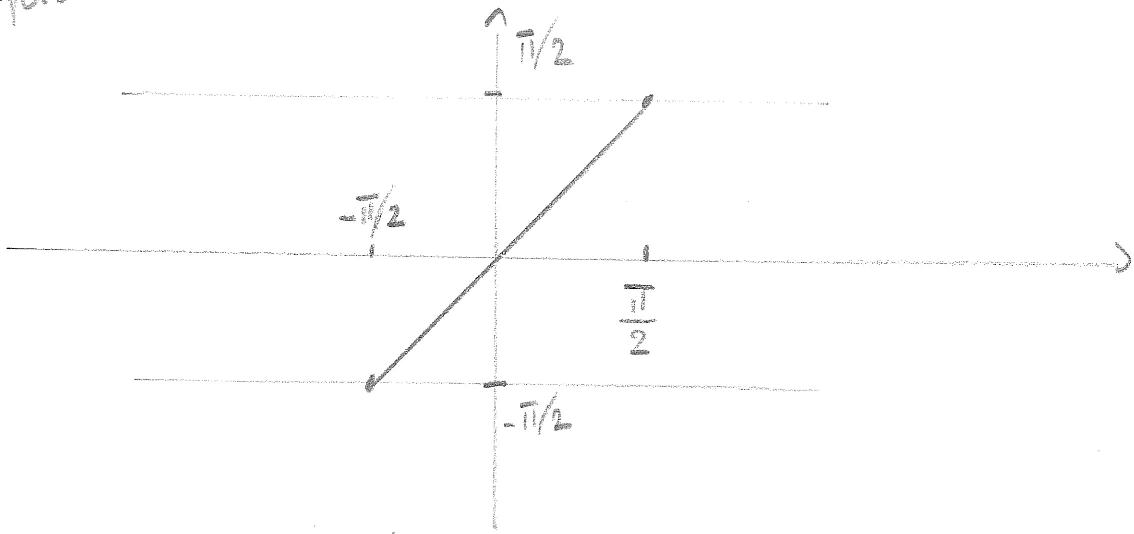
Quindi $D(f) = \mathbb{R}$.

Osservo che $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \pi/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora

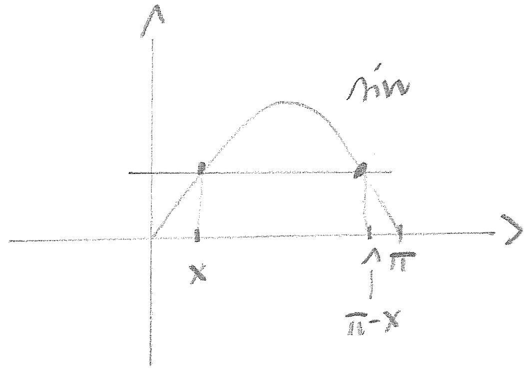
$$\arcsin(\sin x) = x$$

in quanto arcsin è l'inversa di $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.



Ricordo questo fatto:

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

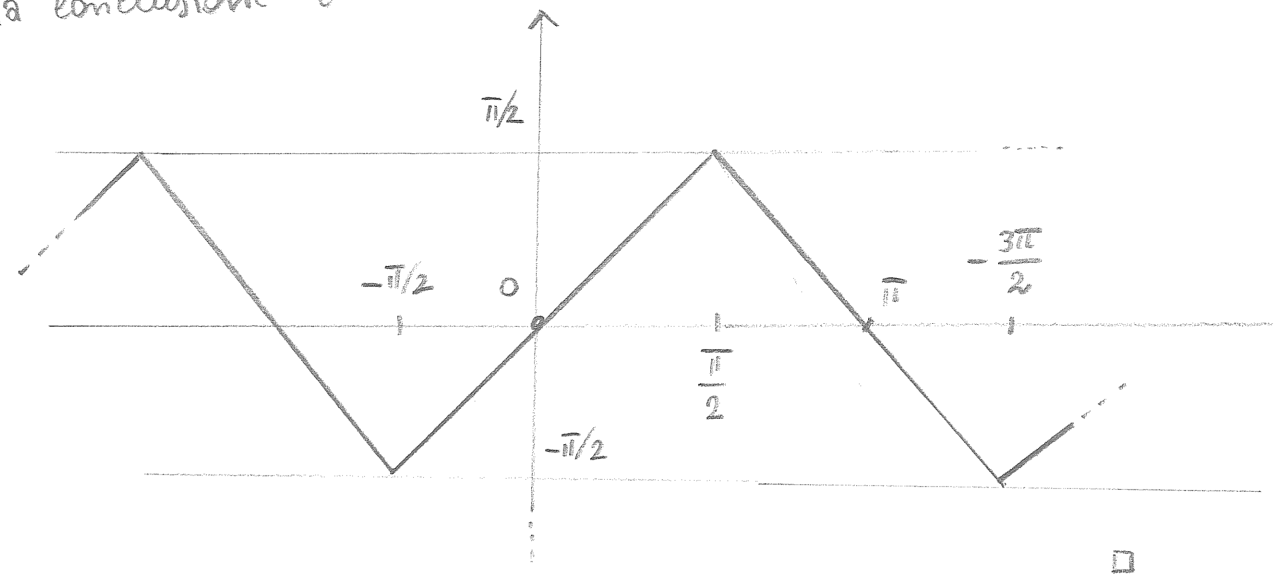


Prendiamo $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Allora $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

e quindi

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

La conclusione è



□

POTENZE E RADICI

Siano $x \in \mathbb{R}$ con $\underline{x \geq 0}$ una "base" e $\alpha \in \mathbb{R}$ un esponente.
Vogliamo definire la potenza

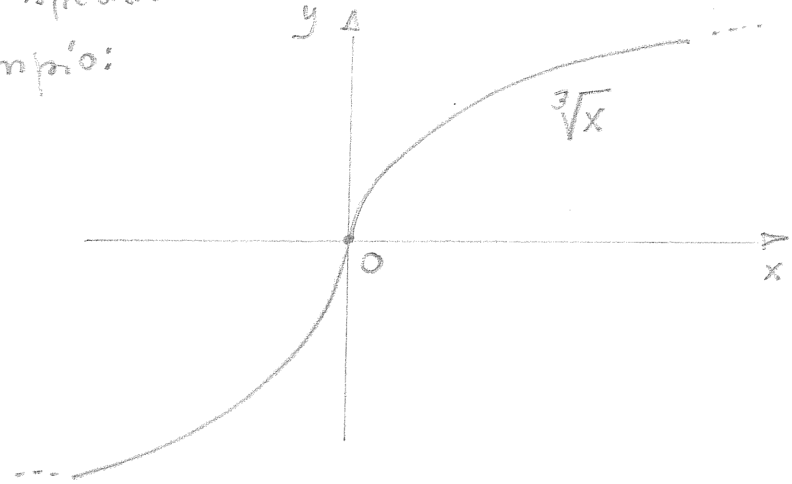
$$x^\alpha \in \mathbb{R} \qquad x = \text{base}, \quad \alpha = \text{esponente}.$$

Se $\alpha \leq 0$ richiediamo $x > 0$.

Convenzione: $x^0 = 1$ per ogni $x > 0$.
Il simbolo 0^0 NON è definito.

Osservazione In casi speciali x^α è definito anche per $x < 0$. Ad esempio:

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$



Nel seguito è $\alpha \neq 0$.

1° Passo. $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Definiamo:

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}.$$

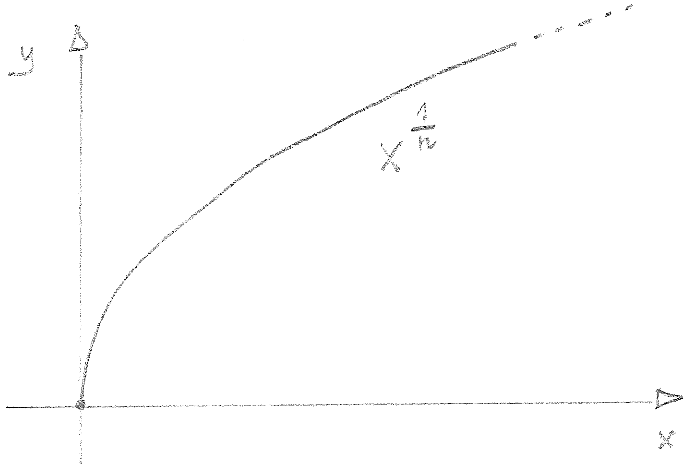
2° Passo. $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.
La funzione $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

$$f(y) = y^n, \qquad y \geq 0,$$

è strettamente crescente (e quindi iniettiva) e suriettiva. Quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$. Definiamo

$$x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x), \qquad x \geq 0,$$

Anche f^{-1} è strettamente crescente:



Notazione: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3° Passo. $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$.

Definiamo

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

con $x^{\frac{1}{q}}$ definito al 2° Passo.

Osservazione:

(1) $x > 1 \implies$ La funzione $\alpha \longmapsto x^\alpha$ è strettamente crescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.

(2) $0 < x < 1 \implies$ La funzione $\alpha \longmapsto x^\alpha$ è strettamente decrescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.

<u>4° Passo.</u> Definiamo x^α quando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Se $x = 1$ definiamo $1^\alpha = 1$.

Se $x > 1$ definiamo:

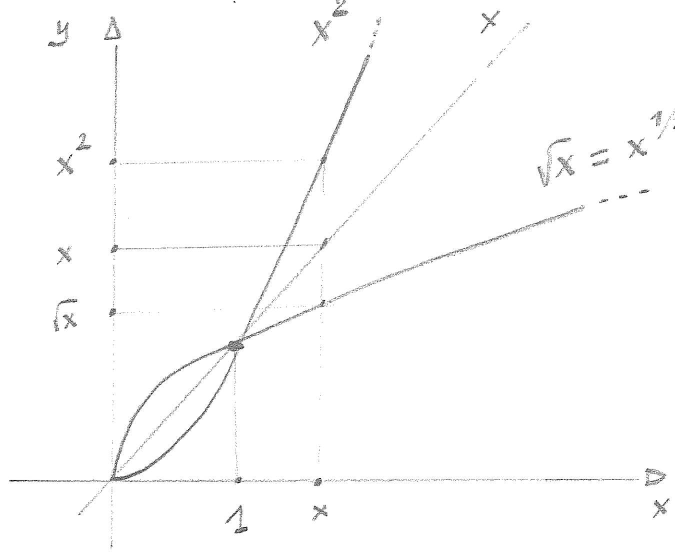
$$x^\alpha = \sup\{x^\beta \in \mathbb{R} :\ \beta \in \mathbb{Q},\ 0 < \beta < \alpha\}$$
$$= \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta < \alpha}} x^\beta .$$

Se $0 < x < 1$ definiamo:

$$x^\alpha = \inf\{x^\beta \in \mathbb{R} :\ \beta \in \mathbb{Q},\ 0 < \beta < \alpha\}$$
$$= \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta < \alpha}} x^\beta .$$

In questo 4° Passo si usa l'Assioma di completezza.

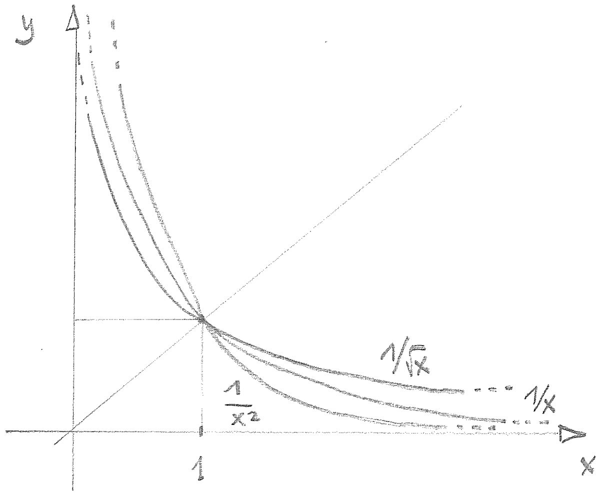
Grafico della funzione x^α, con $\alpha > 0$:



<u>5° Passo.</u> Per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < 0$ definiamo per $x > 0$:

$$x^{\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}.$$

Grafico della funzione $\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$ con $\alpha > 0$:



Proprieta' delle potenze

Dalla definizione delle potenze derivano le seguenti proprieta':

1) $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta}$

2) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}$

3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$

4) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$

5) $0 \le x < y$ e $\alpha > 0 \implies x^{\alpha} < y^{\alpha}$ (funzione crescente)

6) $0 \le x < y$ e $\alpha < 0 \implies x^{\alpha} > y^{\alpha}$ (funzione decrescente)

7) $x > 1$ e $\alpha < \beta \implies 1 < x^{\alpha} < x^{\beta}$

8) $0 < x < 1$ e $\alpha < \beta \implies x^{\beta} < x^{\alpha} < 1$