Esponenziali e logaritmi

Sia $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

$$f_a(x) = a^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si chiama funzione esponenziale.

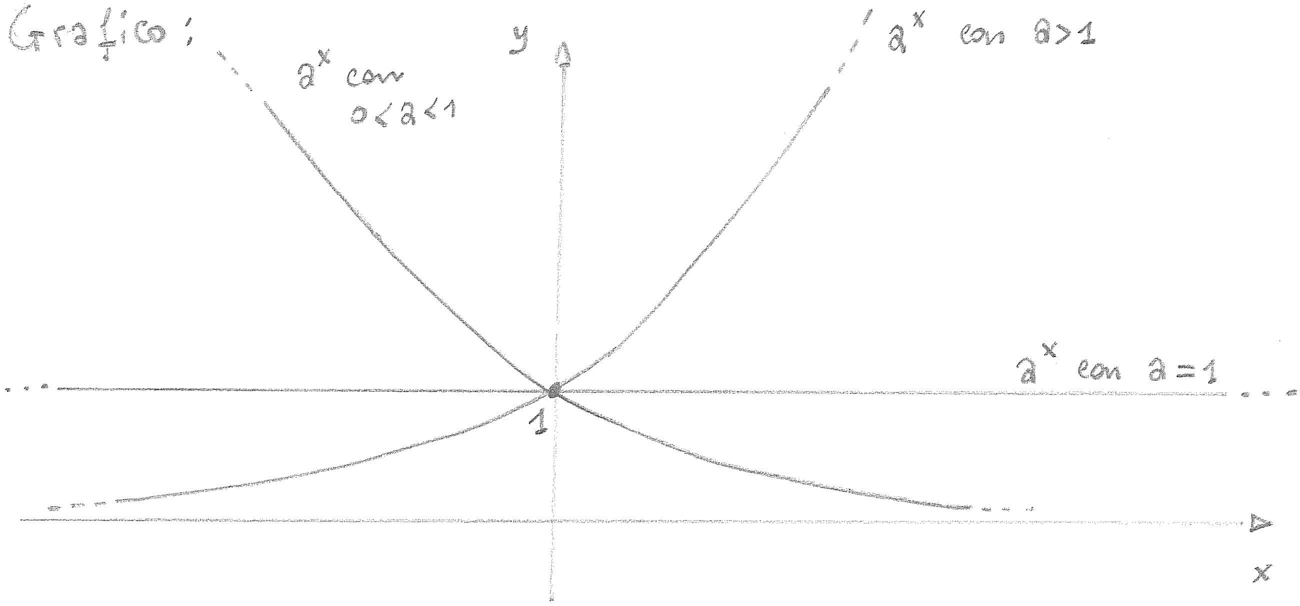
Osserviamo che dalla proprietà 7):

$$a > 1 \implies f_a \text{ è strettamente crescente.}$$

Dalla proprietà 8):

$$0 < a < 1 \implies f_a \text{ è strettamente decrescente.}$$

Grafico:

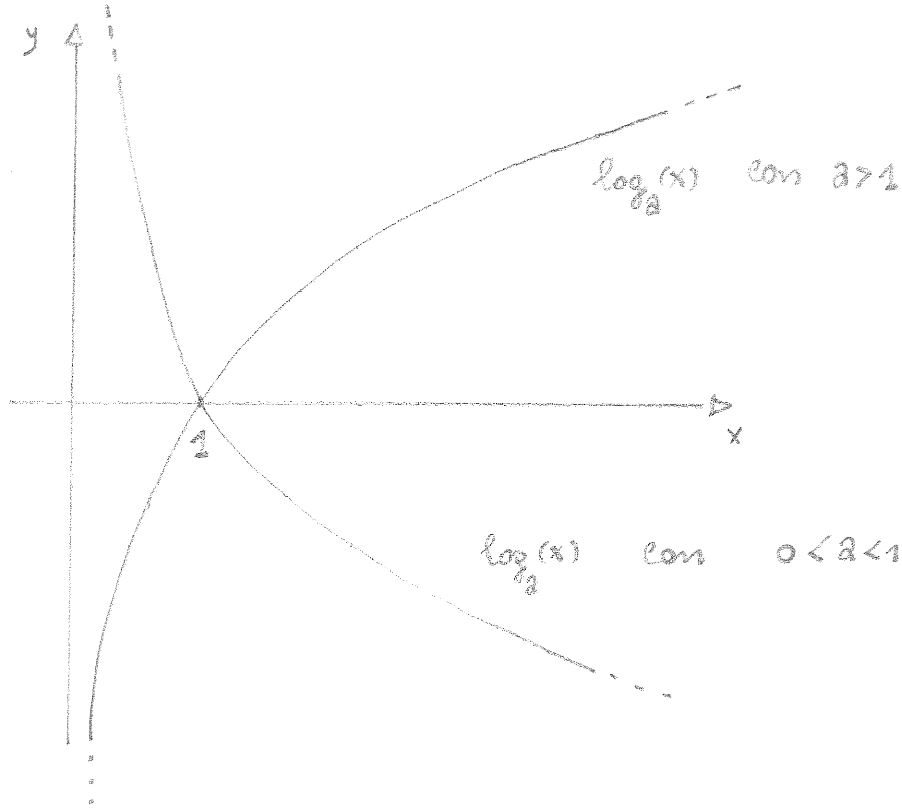


Per $a > 0$ con $a \neq 1$ possiamo definire la funzione inversa $f_a^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, che si chiama logaritmo di base a:

$$\log_a(x) = f_a^{-1}(x), \qquad x > 0.$$

Notazione: $\log_e(x) = \log(x) = \ln(x)$.

Grafico:



Proprietà dei logaritmi:

1) $a^{\log_a(x)} = x$ e $\log_a(a^x) = x$;

2) $\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x)$

3) $\log_a(1) = 0$

4) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

5) $\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x)$

Verifica di 2):

$$2) \Longleftrightarrow a^{\log_a(x^\beta)} = a^{\beta \log_a(x)} \overset{\text{Proprietà potenze}}{=} \left(a^{\log_a(x)}\right)^\beta = x^\beta$$

$$\Longleftrightarrow x^\beta = x^\beta \quad \text{Verificato}$$

Verifica di 4):

$$4) \iff a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

$$\iff xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}$$

$$\iff xy = x \cdot y \quad \text{Verificato}$$

Verifica di 5):

$$\log_a(b)\,\log_b(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_a(x).$$

<u>Esercizio</u> Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1\right).$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} x \neq 1 & \text{(denominatore)} \\ \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 0 & \text{(altrimenti: } 0^0\text{)} \\ \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x - 1 > 0 & \text{(argomento del logaritmo)} \end{cases}$$

Studio la disequazione

$$\frac{x}{x-1} > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

		0		1	
$N = x$	$-$	0	$+$		$+$
$D = x-1$	$-$		$-$	$\times$	$+$
N/D	$+$		$-$		$+$

Studio la disequazione:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x} > 1 \iff x \log\left(\frac{x}{x-1}\right) > \log(1) = 0.$$

Esamino

$$\log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \iff \frac{x}{x-1} > 1$$

$$\iff \frac{x}{x-1} - 1 > 0$$

$$\iff \frac{1}{x-1} > 0$$

$$\iff x > 1$$

Dunque

		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$-$	$\times$	NON ESISTE	$\times$	$+$
$x\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$+$	$\times$	N. E.	$\times$	$+$

Conclusione:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Esercizio Stabilire il dominio della funzione:

$$f(x) = \left(\log \left[(\sin x)^{x^2 - x} \right] \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soluzione. Devono essere verificate le seguenti condizioni:

(1) $\sin x \geq 0$ (base con esponente reale)

(2) $\begin{cases} \sin x = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$ va escluso (0^0)

(3) $(\sin x)^{x^2 - x} > 0$ (argomento di log)

(4) $\log \left[(\sin x)^{x^2 - x} \right] > 0$ (base con esponente $-\frac{1}{2} < 0$)

Osservo che

$$(2) \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ x = 0 \text{ opp. } x = 1 \end{cases} \iff x = 0.$$

Dunque deve essere $x \neq 0$.

Inoltre

$$\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \implies \sin x > 0 \iff \begin{array}{l} 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ \text{per qualche } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Studio (4):

$$(4) \iff (\sin x)^{x^2-x} > 1 .$$

Ci sono 2 casi (abbiamo già $\sin x>0$)

$$\begin{cases} \sin x > 1 \\ x^2-x>0 \end{cases} \quad \text{Vuoto}$$

oppure

$$\begin{cases} \sin x < 1 \\ x^2-x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi , \; k\in\mathbb{Z} \\ x\in(0,1) \end{cases}$$

$$\iff x\in(0,1)$$

Dunque abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad \text{per qualche } k\in\mathbb{Z} \\ 0<x<1 . \end{cases}$$

Siccome $\pi>1$, questo equivale a $0<x<1$.

La conclusione è

$$D(f) = (0,1) .$$