LIMITI DI FUNZIONE

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $\delta > 0$ ricordiamo che

$$I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$$
$$= (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

è l'intorno di x_0 con raggio $\delta > 0$.

Definizione Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice p.to di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

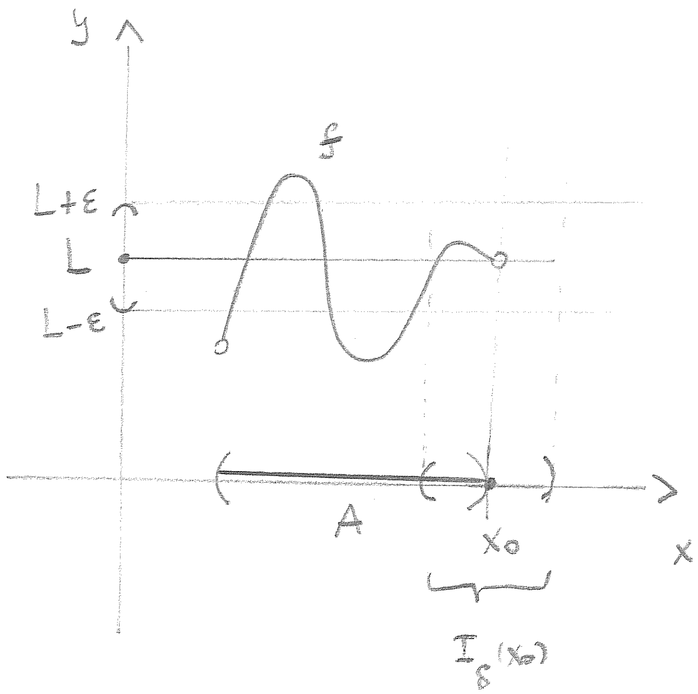
per ogni $\delta > 0$.

Definizione Sia x_0 p.to di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \begin{matrix} 0 < |x - x_0| < \delta \\ x \in A \end{matrix} \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



<u>Proposizione</u> Se f ha limite per $x \to x_0$, allora questo è unico.

Prova omessa. Come per le successioni

<u>Proposizione</u> (Permanenza del segno)

Se esiste

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) > 0 ,$$

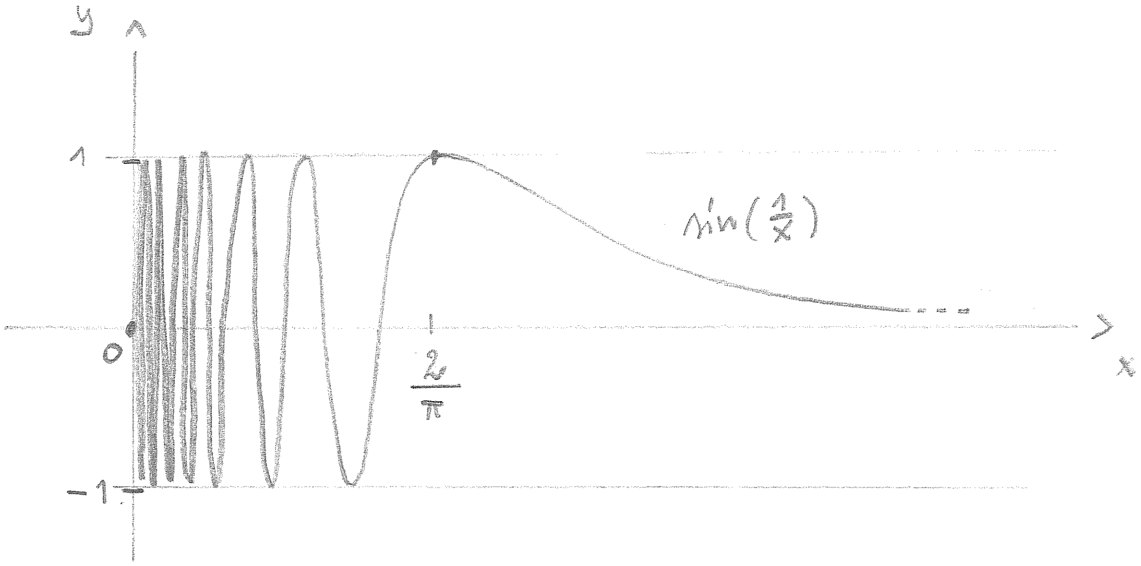
allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cap D(f)$, $x \neq x_0$.

Prova omessa.

Esempio La funzione $f:(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x>0$$

non ha limite per $x \to 0$.



Definizione Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Esercizio. Usando la definizione provare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Svolgimento. Fisso $M>0$ e cerco $\delta>0$ tale che

$$0<|x|<\delta \implies f(x)>M.$$

Studio la disequazione $(x\neq 0)$

$$f(x)>M \iff \frac{1}{x^2}>M \iff x^2<\frac{1}{M}$$

$$\overset{(x\neq 0)}{\iff} |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Dunque è sufficiente scegliere $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$. □

<u>Definizione</u> Sia $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, una funzione. Diciamo che f tende al limite $L\in\mathbb{R}$ per $x\to\infty$ e scriviamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

se

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists M>0$ tale che $|f(x)-L|<\varepsilon$ per ogni $x>M$.

<u>ESERCIZIO.</u> Dare la definizione di:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$;

2) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$;

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$;

4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$.

Esercizio. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{1+2x} = 1.$$

Soluzione. Fissato $\varepsilon > 0$, cerco $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x| < \delta \implies \left| \frac{x+1}{1+2x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Studio la disequazione:

$$(*) \quad \left| \frac{x+1}{1+2x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-1-2x}{1+2x} \right| = \left| \frac{x}{1+2x} \right| < \varepsilon.$$

Supponendo $1+2x \neq 0$, la disequazione equivale a

$$x^2 < \varepsilon^2 \, (1 + 4x^2 + 4x)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-4\varepsilon^2)\, x^2 - 4\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 < 0$$

Posso supporre $1-4\varepsilon^2 > 0 \iff \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Le radici del polinomio associato sono

$$x_\pm = \frac{4\varepsilon^2 \pm \sqrt{16\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2(1-4\varepsilon^2)}}{2(1-4\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{4\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon}{2(1-4\varepsilon^2)}$$

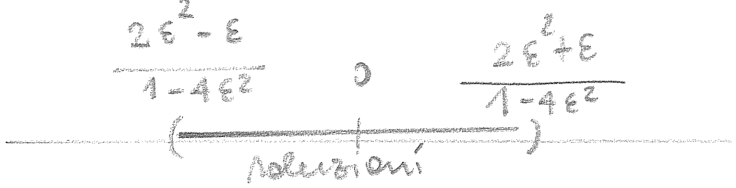
$$= \frac{2\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}$$

Devo prendere l'intervallo interno:

$$\left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon \quad \overset{(x \neq -1/2)}{\iff} \quad \frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon}{1-4\varepsilon^2} < x < \frac{2\varepsilon^2+\varepsilon}{1-4\varepsilon^2}$$

ovvero che $\quad 2\varepsilon^2 - \varepsilon < 0 \iff 2\varepsilon - 1 < 0$

$$\iff \varepsilon < 1/2$$



Quindi basta prendere

$$\delta = \min\left\{\frac{2\varepsilon^2+\varepsilon}{1-4\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{1-4\varepsilon^2}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{1-4\varepsilon^2}.$$

(Se $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, la disequazione è verificata $\forall x$).

□