Esercizio Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty .$$

Soluzione. Fissato $M>0$ cerchiamo $\delta>0$ tale che

$$0 < |x-1| < \delta \implies f(x) > M.$$

La disequazione da discutere è

$$f(x) > M \iff \frac{x}{(x-1)^4} > M \iff x > M(x-1)^4 .$$

Non è possibile fare una soluzione esatta.

Supponiamo $0 < \delta \leq 1/2$. In questo caso:

$$|x-1| < \delta \leq 1/2 \implies -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} .$$

Dunque, usando $x > \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{x}{(x-1)^4} > \frac{1}{2(x-1)^4} .$$

Risolviamo allora la disequazione semplificata

$$(*) \qquad \frac{1}{2(x-1)^4} > M .$$

Chiaramente:

$$x \text{ risolve } (*) \implies f(x) > M.$$

D'altra parte:

$$(*) \iff 1 > 2M(x-1)^4 \iff (x-1)^4 < \frac{1}{2M}$$
$$\iff |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}.$$

Se ora scegliamo $\delta = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2M}} \right\}$
tutti i passaggi sono legittimi e si ha:

$$0 < |x-1| < \delta \implies \frac{x}{(x-1)^4} > M.$$

$\square$

TEOREMA (Operazioni sui limiti) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti)

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$$

$$M = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}.$$

Allora:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$;

3) se $g(x) \neq 0$ ed $M \neq 0$: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Proviamo ad esempio 1). Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$(x \in A)$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $|x - x_0| < \delta$ avremo:

$$\left| f(x) + g(x) - (L+M) \right| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Osservazioni:

(1) Il teorema vale con $\pm\infty$ al posto di x_0.

(2) Il punto 1) del teorema vale con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ con la regola

$$\pm\infty + M = \pm\infty$$

(3) Il punto 2) del teorema vale con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$, $M \neq 0$, con la regola

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0 \\ \mp\infty & \text{se } M < 0 \end{cases}$$

(4) Se f è una funzione limitata e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} .$$

Soluzione. Forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Chiaramente $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1,$

$$\lim_{x \to -\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 .$$

Dunque

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -\frac{\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \to -\infty} 1+\frac{1}{x}} = -1$$

$\square$

Esercizio Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(e^{1/x^2}\right)}{1+x^3} .$$

Soluzione. Chiaramente:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \cos\left(e^{1/x^2}\right) = 0$$

in quanto: infinitesimo $\cdot$ limitato $=$ infinitesim.

Inoltre

$$\lim_{x \to 0} (1+x^3) = 1 .$$

Dal Teorema sul limite del quoziente troviamo:

$$L = 1 .$$

$\square$

Esempi fondamentali

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $$\lim_{x \to 0} |x|^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

2) $$\lim_{x \to \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Sia ora $a>0$ una base. Allora

$$3) \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}.$$

$$4) \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \end{array}\right\} \text{ se } a>1.$$

<u>TEOREMA (del confronto)</u> Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \quad x \in A,$$

e sia x_0 un p.to di accumulazione di A.
Se esistono uguali

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

allora si ha anche

$$L = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Dimostrazione. Identica a quella per le successioni.