Osservazione: Fatto speciale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

Limiti trigonometrici notevoli

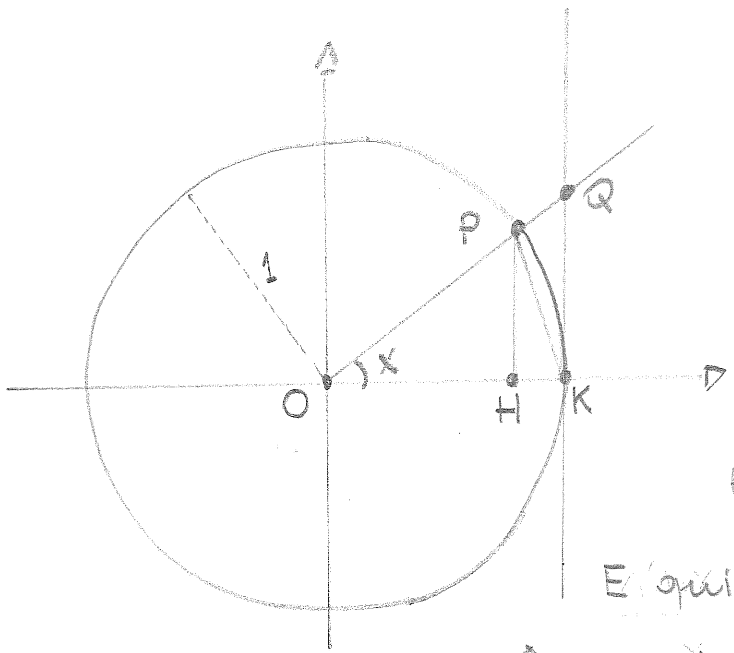
Proviamo che:

1) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad (= \sin(0))$;

2) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad (= \cos(0))$;

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Partiamo dalla definizione geometrica di $\sin(x)$ e $\cos(x)$:



$x = \overset{\frown}{POK}$ angolo in radianti

$\sin x = \overline{PH}$

$\cos x = \overline{OH}$

$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{QK}$

Abbiamo le inclusioni:

$\overset{\triangle}{POK} \subset \overset{\frown}{POK} \subset \overset{\triangle}{QOK}$

triangolo — settore circolare

E quindi per le aree:

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{POK}) \le \text{Area}(\overset{\frown}{POK}) \le \text{Area}(\overset{\triangle}{QOK}),$$

dove per $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\text{Area}(\overset{\triangle}{POK}) = \frac{1}{2}\sin x$, $\text{Area}(\overset{\frown}{POK}) = \frac{1}{2}x$ e $\text{Area}(\overset{\triangle}{QOK}) = \frac{1}{2} tg\, x$. Deduciamo che:

$$\sin(x) \le x \le tg(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Di conseguenza, per $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$|\sin x| \leq |x|$$

e dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Inoltre

$$0 \leq 1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \leq \sin^2 x$$

per $|x| \leq \frac{\pi}{2}$: $\cos x \geq 0$

Quindi per confronto:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Infine, dalla $(*)$

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \iff \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Per confronto deduciamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$\square$

Esercizio Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x \, (1-\cos x)}{x^3} .$$

Soluzione.

$$\frac{\operatorname{tg} x \, (1-\cos x)}{x^3} = \frac{\sin x}{\cos x} \, \frac{1-\cos^2 x}{x^3 \, (1+\cos x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos x \, (1+\cos x)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 .$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x \, (1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 = 1$$

deduciamo che $L = 1/2$.

$\square$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate sono:

$$[\infty - \infty],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [1^{\infty}],\ [0 \cdot \infty],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ [0^0],\ [\infty^0].$$

Vogliamo sviluppare tecniche per risolvere ciascuna delle precedenti forme indeterminate.

Teorema Valgono i seguenti limiti:

1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{\beta}}{a^x} = 0 \quad \text{per ogni } \beta > 0 \text{ e } a > 1.$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log_a x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0 \quad \text{per ogni } \beta > 0,\ \alpha > 0 \text{ e } a > 1.$$

Prova. Premettiamo la seguente

Definizione. La parte intera di $x \in \mathbb{R}$ è il numero intero

$$[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} \,;\, n \leq x \}.$$

Si hanno le seguenti proprietà:

i) $[x] \leq x < [x] + 1$;

ii) $\lim_{x \to \infty} [x] = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{[x]} = 0$.

Proviamo l'affermazione 1) nel caso $\beta = 1$.
Sia $\sqrt{a} = 1 + h$ con $h > 0$, in quanto $a > 1$.
Allora

$$a^x = (\sqrt{a})^{2x} = \left[(1+h)^x\right]^2 \geq \left[(1+h)^{[x]}\right]^2$$

$$\underset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left[1 + [x]\, h\right]^2 ,$$

e di conseguenza

$$0 < \frac{x}{a^x} \leq \frac{[x]+1}{(1+[x]h)^2} = \underbrace{\frac{1}{[x]}}_{\downarrow \atop 0} \; \underbrace{\frac{1 + 1/[x]}{(1/[x] + h)^2}}_{\downarrow \atop 1/h^2}$$

e per confronto

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{a^x} = 0 .$$

Proviamo l'affermazione 2):

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} .$$

Facciamo la sostituzione

$$y = \log_a x \iff a^y = a^{\log_a x} = x$$

e osserviamo che $x \longrightarrow \infty \implies y \longrightarrow \infty$.