Dunque

$$L = \lim_{y \to \infty} \frac{y^\beta}{(a^y)^\alpha} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^\beta}{(a^\alpha)^y} = 0$$

in quanto $a^\alpha > 1$ essendo $\alpha > 0$. $\square$

<u>Esercizio</u> Verificare che per ogni $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta \log x = 0.$$

Suggerimento: Sostituzione $y = -\log x$.

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\log_2 (e^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x}.$$

Soluzione. Forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Abbiamo

$$\frac{\log_2 (e^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x} = \frac{\log_2 \left[e^x \left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)\right]}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x}\right)} =$$

$$= \frac{x \log_2 e + \log \left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x}\right)}$$

Siccome
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_e x}{x} \right) = 0$$

e
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{x^2}{e^x} \right) = 0$$

deduciamo che
$$L = \log_2 e .$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x \log x} + e^x \right)^2} .$$

Soluzione. Il contributo dominante al numeratore
$$N = x^{2x} + |\sin x|^{x^2}$$
$$= x^{2x} \left(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} \right)$$

è x^{2x}, dove
$$\lim_{x \to \infty} \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} = 0 ,$$

Esaminiamo il denominatore. Abbiamo

$$2^{\log x} = 2^{\log\left(2^{\log_2 x}\right)} = 2^{(\log_2 x)(\log 2)} =$$

$$= \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = x^{\log 2}.$$

Dunque, il denominatore è

$$D = \left(2^{x \log x} + e^x\right)^2 = \left(\left(x^{\log 2}\right)^x + e^x\right)^2 =$$

$$= \left(x^{x \log 2} + e^x\right)^2 = \left(\left(x^{\log 2}\right)^x + e^x\right)^2$$

$$= x^{2x \log 2} \left(1 + \left(\frac{e}{x^{\log 2}}\right)^x\right)^2.$$

Definitivamente (per x grande)

$$\left(\frac{e}{x^{\log 2}}\right)^x < \frac{1}{2^x},$$

e siccome $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x} = 0,$

per confronto

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e}{x^{\log 2}}\right)^x = 0.$$

Formiamo il quoziente:

$$\frac{N}{D} = \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} \; \frac{1 + \dfrac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\left(1 + \dfrac{e^x}{x^{x\log 2}}\right)^2},$$

Esaminiamo

$$\frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} = x^{2x(1-\log 2)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

essendo $1-\log 2 > 0$. Deduciamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \infty .$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} + \sin(\sqrt{x})}{x^\alpha}.$$

Soluzione. Esamino separatamente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^\alpha},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha}.$$

Primo limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}\,)}{x^{\alpha}} \overset{\sqrt{x} = y}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(y)}{y^{2\alpha}} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y^{2\alpha - 1}} \frac{\sin(y)}{y} = \begin{cases} 0 & 2\alpha - 1 < 0 \\ 1 & 2\alpha - 1 = 0 \\ +\infty & 2\alpha - 1 > 0 \end{cases}$$

Secondo limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{\alpha}} \overset{\frac{1}{x} = y}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y}}{y^{-\alpha}}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{y^{\alpha}}{e^{y}} = 0 \quad \forall \alpha .$$

La conclusione è

$$L = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2} . \end{cases}$$

$\square$