Analisi locale delle funzioni

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che f è infinitesimo per $x \to 0$ se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Scriveremo in questo caso $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$.

2) Diciamo che f ha ordine di infinitesimo $n \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$ se esiste finito e $\neq 0$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0$$

3) Diremo che $f(x) = o(x^n)$, con $n \in \mathbb{N}$ ("o piccolo di x^n") per $x \to 0$ se

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Notazione $o(x^n)$ indica una generica funzione che per $x \to 0$ tende a 0 più velocemente di x^n.

Algebra degli "o piccoli"

I "simboli di Landau" verificano le seguenti proprietà algebriche:

1) $o(x^n) = x^n \cdot o(1)$

2) Se $n \leq m$ allora $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$

3) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

4) Se $m > n$ allora $o(x^n) + x^m = o(x^n)$

5) Non distinguiamo fra $o(x^n)$ e $K \cdot o(x^n)$ con $K \in \mathbb{R}$ $(K \neq 0)$.

6) Regola di sostituzione:
se $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ e $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$,
allora $f(g(x)) = g(x)^n \cdot o(1)$.

Esercizio Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = x \sin(x^2) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin^2(x).$$

Soluzione. Sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e quindi $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \iff \sin x = x(1 + o(1))$

Ovvero: $\sin x = x + o(x)$.

Regola di sostituzione:

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Sviluppo $\sin^2(x)$:

$$(\sin x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + 2x\,o(x) + o(x)^2$$

$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

Dunque:

$$f(x) = x\,(x^2 + o(x^2)) + \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)\left(x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= x^3 + x\,o(x^2) + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}\,o(x^2) + x^2 o(x) + o(x)\,o(x^2)$$

$$= x^3 + o(x^3) + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}\,o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)$$

$$= \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

Deduciamo che f ha ordine di infinitesimo 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{2} + o(1)\right) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

$\square$

Sviluppi di Taylor elementari

Ecco alcuni sviluppi elementari per $x \to 0$:

1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

4) $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

5) $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

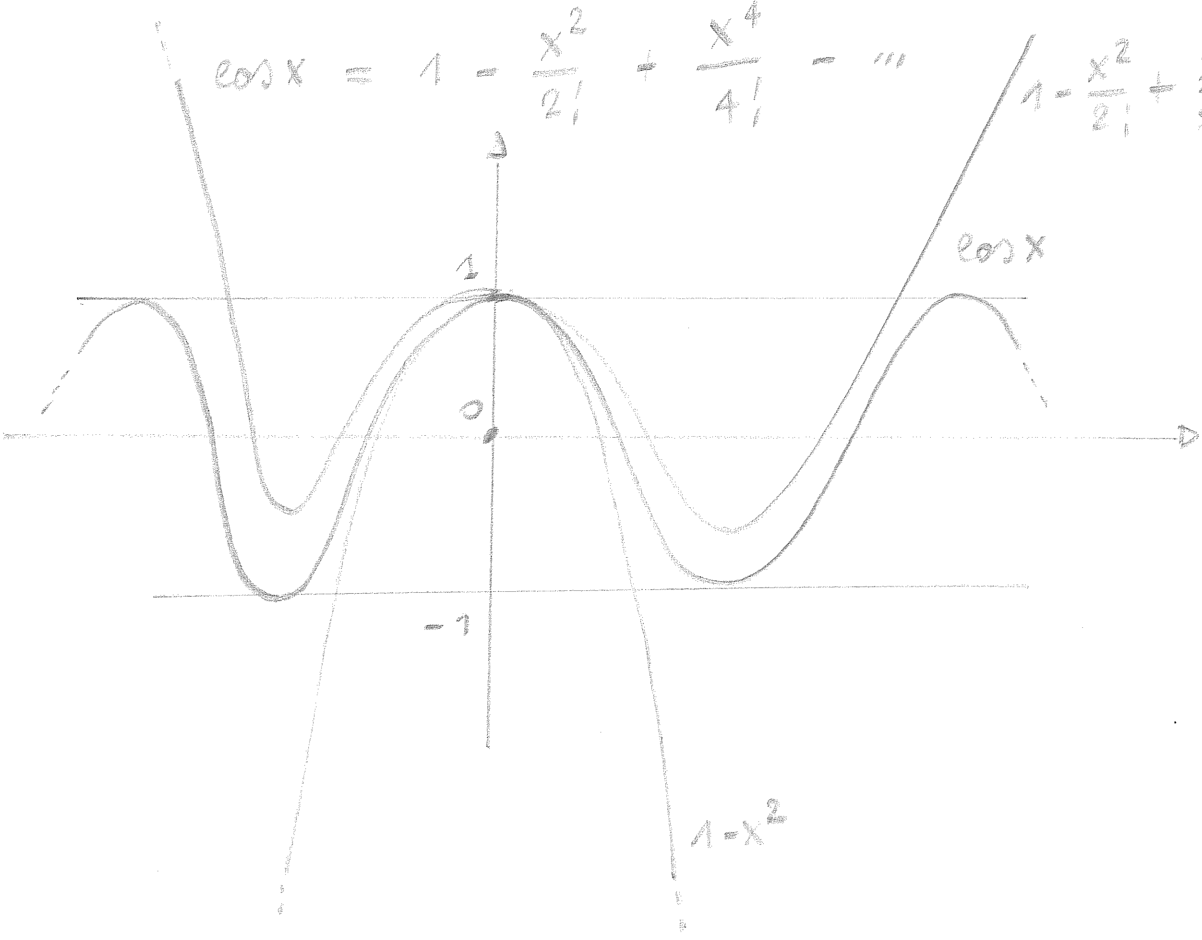
6) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

7) $(1+x)^\alpha \underset{\alpha \in \mathbb{R}}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

Dimostreremo queste formule più avanti.

__Esempio__ Guardiamo lo sviluppo del coseno:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$



__Esercizio__

1) Sviluppare la funzione $[\log(1+x)]^2$ in modo preciso ("esatto") fino al 3° ordine

2) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2}{x^3}.$$

Soluzione.

(1) Ricordiamo lo sviluppo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Quindi

$$\left(\log(1+x)\right)^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^2)^2 - x^3 + x\,o(x^2) + x^2 o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) - x^3 + o(x^3) + o(x^4)$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3) + o(x^4)$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3)$$

(2) Sviluppiamo le altre funzioni:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + \alpha x^2 + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$