Il numeratore è

$$N = e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2$$

$$= 1 + \alpha x^2 + o(x^3) - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) +$$

$$+ x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$= x^2\left(\alpha + \frac{1}{2} + 1\right) - x^3 + o(x^3)$$

Dunque dobbiamo calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) x^2 - x^3 + o(x^3)}{x^3} = \begin{cases} +\infty & \alpha + \frac{3}{2} > 0 \\ -\infty & \alpha + \frac{3}{2} < 0 \\ -1 & \alpha + \frac{3}{2} = 0 . \end{cases}$$

□

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\cosh x - 1)\log x + x^{x+1} - x}{\sin^2(x) \log x} .$$

Soluzione. Osserviamo prima di tutto che $\log x$ **non** si sviluppa per $x \to 0^+$.

Iniziamo a sviluppare le funzioni elementari:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\sin x = x + o(x) \implies (\sin x)^2 = x^2 + o(x^2)$$

Osserviamo che

$$x^{x+1} = x \cdot x^x = x\, e^{x \log x}.$$

Sviluppiamo

$$e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0.$$

Quindi, per la regola di sostituzione:

$$e^{x \log x} = 1 + x \log x + o(x \log x).$$

Il numeratore è

$$N = (\cosh x - 1) \log x + x^{x+1} - x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) \log x + x \left(\cancel{1} + x \log x + o(x \log x) \right) - \cancel{x}$$

$$N = \left(\underbrace{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)\right)\log x + \underbrace{x^2\log x} + x\, o(x\log x)$$

$$= x^2\log x\left(\frac{1}{2}+1\right) + \log x\; o(x^3) + x\, o(x\log x)$$

$$= \frac{3}{2}x^2\log x + x^3\log x\; o(1) + x^2\log x\; o(1)$$

$$= \frac{3}{2}x^2\log x + x^3\log x\; o(1)$$

Il denominatore è

$$D = \sin^2(x)\log x = \left(x^2 + o(x^2)\right)\log x$$

$$= x^2\log x + x^2\log x\cdot o(1).$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}x^2\log x + x^3\log x\cdot o(1)}{x^2\log x\left(1+o(1)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2} + x\cdot o(1)}{1+o(1)}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

□

Criterio del confronto asintotico per serie

Teorema Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni positive, $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Supponiamo che esista finito e non zero il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 .$$

Allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} .$$

Dim. Per ipotesi: $L > 0$. Dunque esiste $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si avrà

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L .$$

Di conseguenza

$$\frac{L}{2}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq 2L \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n ,$$

e la tesi segue.

$\square$

<u>Applicazione</u> Vogliamo studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad \text{con } a_n > 0 .$$

Cerchiamo $\alpha > 0$ tale che esista finito e $\neq 0$ il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = L \neq 0 .$$

Si confronta la serie data con la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$.

<u>Esercizio</u> Stabilire se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\log(n+1) - \log n\right)}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} .$$

Soluzione. Sviluppi:
$$\sin(x) = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

e poiché $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$ si avrà
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Inoltre
$$\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} =$$
$$= \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Infine
$$\sqrt[4]{n+1} = \sqrt[4]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n^{1/4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ricordiamo lo sviluppo
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

e dunque
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to \infty$$

Di conseguenza
$$\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} = n^{1/4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/4} - n^{1/4} =$$
$$= n^{1/4}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/4} - 1\right]$$
$$= n^{1/4}\left[\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^{3/4}}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right)$$