LEZIONE 4

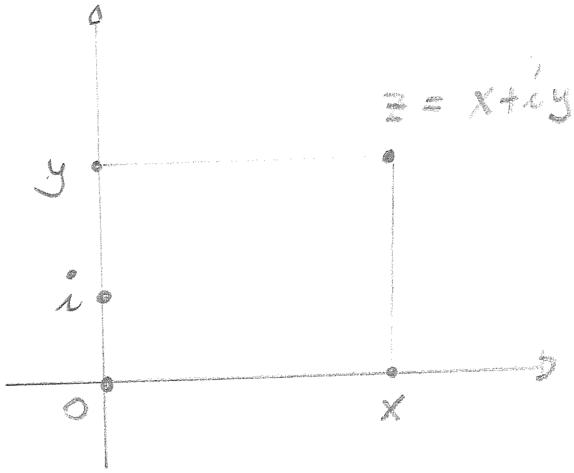
Numeri complessi

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ che ubbidisce alla regola $i^2 = -1$. i = "unità immaginaria".

I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \; : \; x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Possiamo identificare il numero complesso $z = x+iy$ con il punto del piano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x,y):



$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$

Chiamiamo

$x = Re(z) = Re(x+iy)$ Parte reale di z

$y = Im(z) = Im(x+iy)$ Parte immaginaria di z

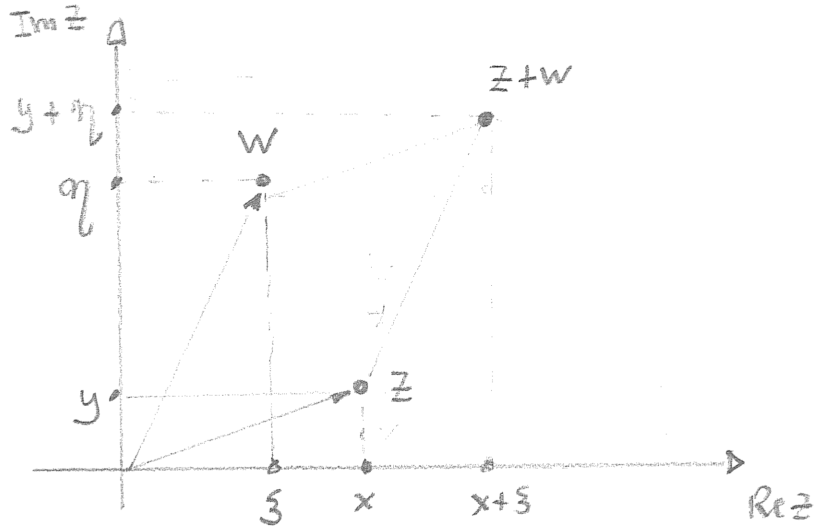
Introduciamo le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{C}$.

Dati $z = x+iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$:

Somma

$$z + w = (x+iy) + (\xi + i\eta) = (x+\xi) + i(y+\eta)$$

Nel piano complesso è semplicemente una somma vettoriale:



La somma verifica gli assiomi (S1) - (S4)

<u>Prodotto</u> Definiamo l'operazione di prodotto:

$$z \cdot w = (x+iy)\cdot(\xi+i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2 y\eta$$

$$= (x\xi - y\eta) + i\,(x\eta + y\xi).$$

Vedremo l'interpretazione geometrica in seguito.
É importante saper calcolare il reciproco di $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2-i^2y^2}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Se definiamo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

si ha dunque

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0.$$

Il prodotto verifica gli assiomi (P1) - (P4).

Vale la proprietà distributiva

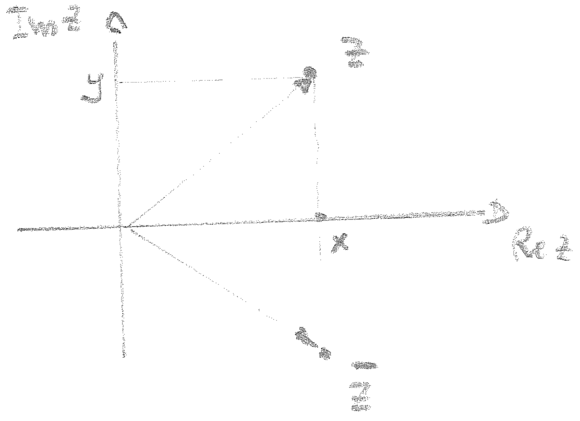
$$z \cdot (w + \zeta) = zw + z \cdot \zeta \quad , \ z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

<u>Importante</u> Nel campo complesso $\mathbb{C}$ <u>non</u> c'è relazione d'ordine $\leq$. Dunque

$z \leq w$ con $z, w \in \mathbb{C}$ <u>NON</u> ha senso.

<u>Coniugazione</u> Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiamo il coniugato di z

$$\bar{z} = x - iy$$



Proprietà del coniugato

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(3) $\bar{\bar{z}} = z$

(4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

(5) $Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Modulo di un numero complesso

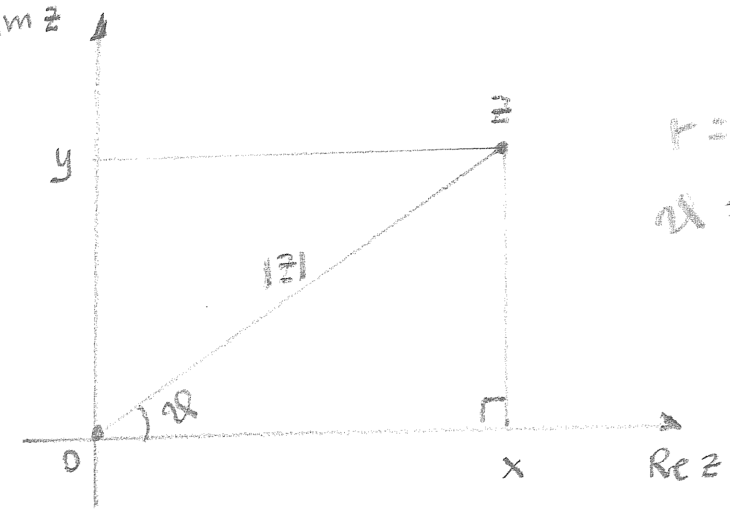
Definiamo il modulo di $z = x+iy$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}.$$

Se $z = x \in \mathbb{R}$: $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ Valore assoluto.

Per il Teorema di Pitagora:



$r = |z|$ modulo

$\vartheta = \arg(z)$ argomento

<u>Argomento</u> sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, con il semiasse positivo delle x. Definiamo l'argomento di z

$$\arg(z) = \vartheta .$$

Dalla trigonometria sappiamo che

$$x = |z| \cos\vartheta \quad e \quad y = |z| \sin\vartheta .$$

Formando il quoziente

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x} .$$

Quindi, se z è nel 1° quadrante ovvero se $\vartheta \in [0, \pi/2)$ avremo la formula

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

<u>Rappresentazione trigonometrica</u> sia $r = |z| \geq 0$ il modulo di z, e sia $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Allora avremo

$$z = x + iy = r\cos\vartheta + i\, r\sin\vartheta$$

$$= r\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) .$$