Siccome $\alpha - \frac{1}{2} < 1$, per confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(3) $\alpha > 1$. Il termine dominante dentro $|\dots|$ è $1/n$. Dunque

$$a_n = \sqrt{n} \left| \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + o(1)\right).$$

Per confronto asintotico la serie data diverge.

$\square$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\left(\frac{1 + \sin x}{1 + x}\right)}{\sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x}.$$

Soluzione. Il numeratore è

$$N = \log\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right) = \log(1+\sin x) - \log(1+x)$$

Lo sviluppo del logaritmo è

$$\log(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Siccome $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, per la regola di sostituzione

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + o(\sin^3 x).$$

Sviluppiamo il seno:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + o(x^3)$$

$$(\sin x)^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^3)$$

Infine osserviamo che $o(\sin^3 x) = o(x^3)$, infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(\sin^3 x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot o(1) = 0.$$

Il numeratore è :

$$N = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + o(\sin^3 x)$$

$$- \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) + o(x^3)$$

$$- \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

Sviluppiamo il denominatore :

$$D = \sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x$$

$$= \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) + \left(\cancel{(-x)} - \cancel{\frac{1}{2}(-x)^2} + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3) \right)$$

$$+ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) \right)$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{2} x^3 + o(x^3) .$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Forme indeterminate $[1^\infty]$

Siano f e g due funzioni tali che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \infty.$$

Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)}, \qquad [1^\infty].$$

Si procede nel seguente modo:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)},$$

e poi si sviluppa

$$\log f(x) = \log\left(1 + f(x) - 1\right)$$

$$= f(x) - 1 + o\left(f(x) - 1\right)$$

$$= \left(f(x) - 1\right)\left(1 + o(1)\right)$$

Quindi si deve calcolare

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} e^{g(x)\log f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{g(x)(1-f(x))(1+o(1))},$$

e a questo punto basta calcolare

$$\lim_{x\to 0} g(x)(1-f(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{1-f(x)}{1/g(x)}, \qquad \left[\frac{0}{0}\right].$$

<u>Esempio</u> Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Col precedente procedimento si trova

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{1/x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos x)} =$$

$$= e^{\frac{1}{x^2}\log(1+\cos x-1)} = e^{\frac{1}{x^2}\left[(\cos x-1)+o(\cos x-1)\right]}$$

$$= e^{\frac{\cos x-1}{x^2}(1+o(1))} = e^{\frac{\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\cancel{-1}}{x^2}(1+o(1))}$$

$$= e^{\left(-\frac{1}{2}+o(x)\right)(1+o(1))}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\left(-\frac{1}{2}+o(x)\right)(1+o(1))} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

□