Asintoti obliqui

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. La retta di equazione $y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$ si dice asintoto di f a $+\infty$ (rispettivamente a $-\infty$) se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (\text{risp. } x \to -\infty)}} \Big(f(x) - (mx+q) \Big) = 0 .$$

Calcolo di m e q Cerchiamo eventuali asintoti. Si cerca in primo luogo il coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Se un tale $m \in \mathbb{R}$ esiste, si cerca $q \in \mathbb{R}$

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx .$$

Se anche $q \in \mathbb{R}$ esiste (finito), si ha l'asintoto

$$y = mx + q .$$

□

Esempio Calcolare gli asintoti a $\pm\infty$ della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+x}\,.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x^2+x \geq 0$ ovvero $x(x+1) \geq 0$ ovvero $x \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$.

Asintoto a $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1+\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Quindi c'è l'asintoto a $+\infty$

$$y = 2x + \frac{1}{2}\,.$$

Asintoto a $-\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \sqrt{1+1/x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) = 0 .$$

Potrebbe esserci un asintoto orizzontale.

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+x}$$

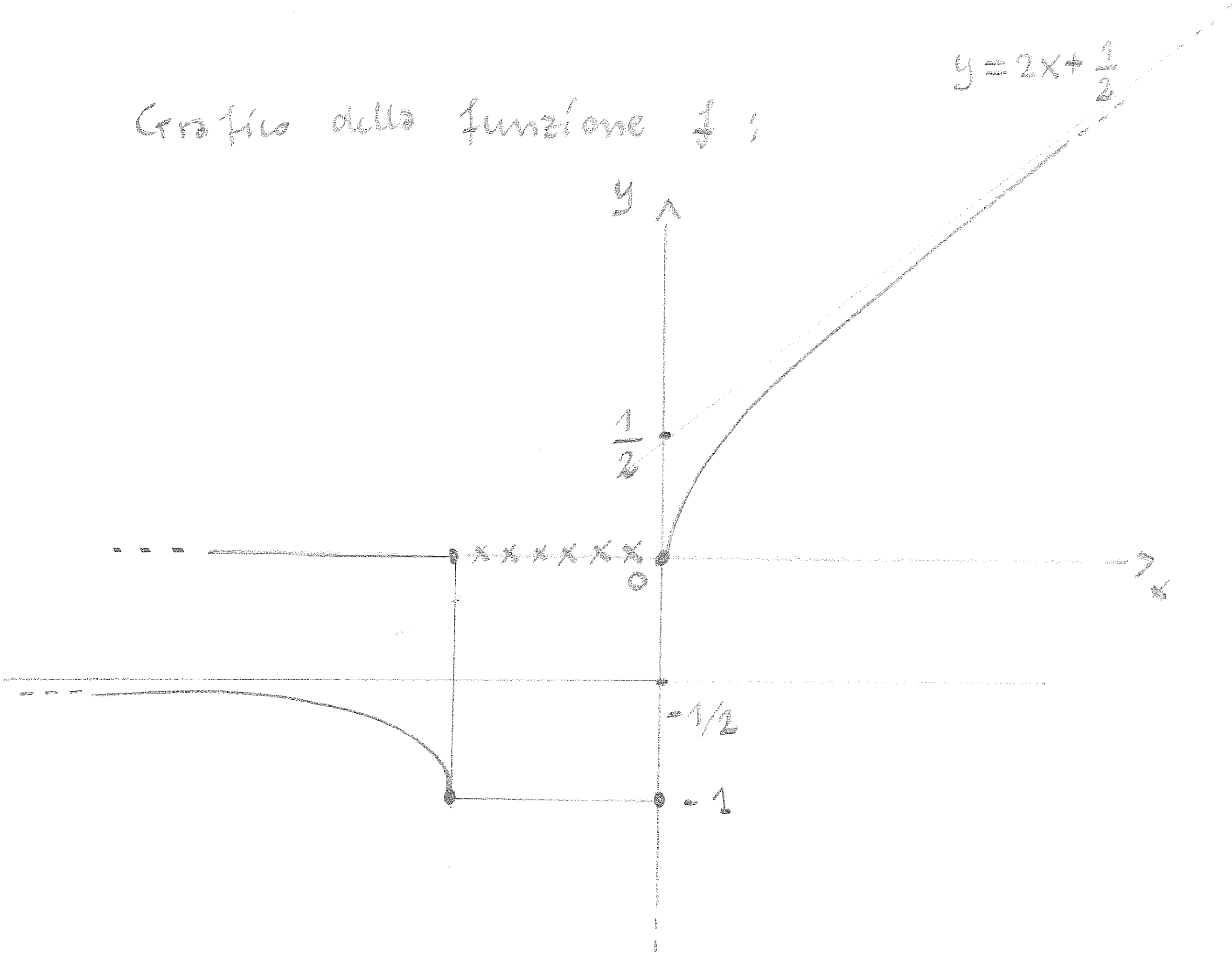
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+1/x} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+1/x} + 1} = -\frac{1}{2} .$$

Grafico della funzione f :



FUNZIONI CONTINUE

Definizione (Limiti destro e sinistro)

Siano $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione con $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A.

(1) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta).$$

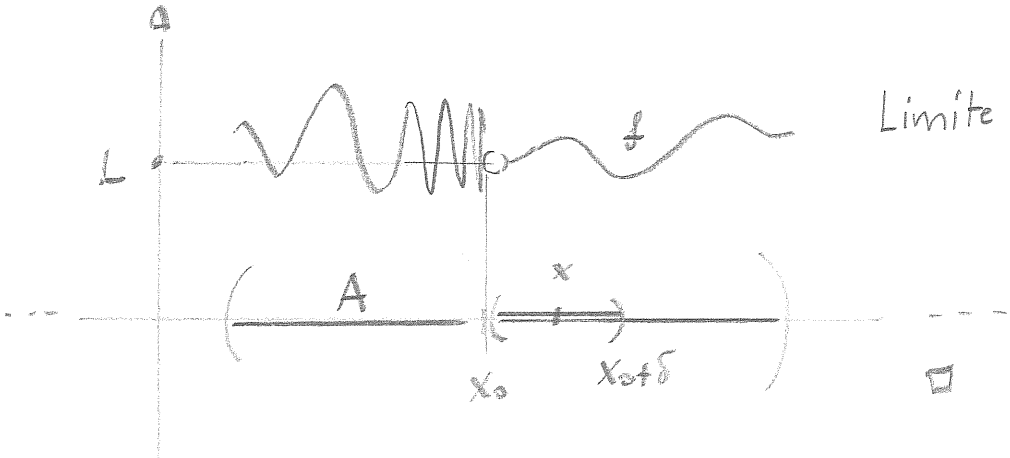
(2) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0).$$



Limite destro

$\square$

<u>Definizione</u> Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ (punto di A), e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) f si dice continua in $x_0 \in A$ se:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

(2) f si dice continua su A se è continua in ogni punto $x_0 \in A$.

<u>Teorema</u> (Proprietà equivalenti della continuità)

Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$.
Sono equivalenti:

(1) f è continua in x_0;

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(3) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;

(4) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ e $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ si ha

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$