COROLLARIO Le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ e $\log_a x$ sono continue nel loro dominio.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) & \text{per } x < 0 \\ \sqrt{x} + \beta x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + e^{\alpha x} & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia continua su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Deve essere $\beta \geq 0$, altrimenti $\log(\beta + x^2)$ non è definito $\forall x < 0$. Su ciascun intervallo

$$(-\infty, 0), \quad [0,1], \quad (1, \infty)$$

f è continua in quanto somma e composizione di funzioni continue.

Imponiamo le seguenti condizioni:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \overset{OK}{=} f(0) = 0$$

$$1 + \beta \overset{OK}{=} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Dunque dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) \\ 1 + \beta = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^3 + e^{\alpha x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + \alpha + \log \beta \\ 1 + \beta = 1 + e^{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \log \beta = 0 \\ \beta = e^{\alpha} \end{cases}$$

Sostituisco la seconda equazione nella prima:

$$0 = \alpha + \log e^{\alpha} = \alpha + \alpha \log e = \alpha\,(1+1)$$

e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza $\beta = e^0 = 1$.

$\square$

<u>Esercizio</u> Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}} .$$

Soluzione. Osserviamo che

$$(x^3 + x^2)^{3/2} = \left(x^2(1+x)\right)^{3/2} = |x|^3\,(1+x)^{3/2}$$

Dunque, distinguendo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^3} \frac{1}{(1+x)^{3/2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(-x)^3} \frac{1}{(1+x)^{3/2}} = -1,$$

I limiti destro e sinistro sono diversi.
Quindi il limite non esiste.

$\square$

TEOREMI DI BOLZANO E DI WEIERSTRASS

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme nonvuoto, $A \neq \phi$, limitato con infiniti elementi. Allora esiste almeno un $x_0 \in A$ punto di accumulazione di A.

DIM. Siccome A è limitato, esistono $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ con $a_1 < b_1$ tali che $A \subset [a_1, b_1] = A_1$.
Sia $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ il punto medio.
Uno dei due intervalli

$$[a_1, c_1] \quad \text{oppure} \quad [c_1, b_1]$$

contiene infiniti elementi di A. Supponiamo che sia $[a_1, c_1]$. Allora definiamo

$$a_2 = a_1, \qquad b_2 = c_1, \qquad c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}.$$

Osserviamo che

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1).$$

Sia $A_2 = [a_2, b_2] = [a_2, c_2] \cup [c_2, b_2]$.

Uno dei due intervalli $[a_2, c_2]$ oppure $[c_2, b_2]$ contiene infiniti elementi di A.

Per induzione, supponiamo di aver definito

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$$

e $A_n = [a_n, b_n]$ che contiene infiniti elementi di A. Inoltre

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1).$$

Allora, detto $c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, uno degli intervalli

$$[a_n, b_n] \text{ oppure } [b_n, c_n]$$

contiene infiniti elementi di A. Chiamiamo questo intervallo

$$A_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

con

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^n}(b_1 - a_1).$$

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e limitata.
Quindi esiste

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e limitata.
Quindi esiste

$$M = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

D'altra parte

$$M - L = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0 .$$

Quindi $M = L$. Proviamo che

$$x_0 = M = L$$

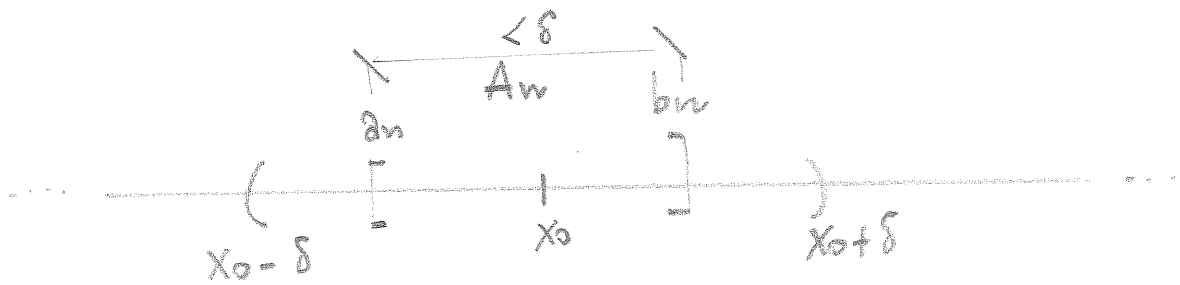
è un punto di accumulazione di A.

Sia $\delta > 0$. Siccome $x_0 \in A_n = [a_n, b_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) < \delta$$

allora avremo

$$A_n \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$$



Siccome A_n contiene infiniti elementi di A segue che $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. In particolare

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset .$$

$\square$