DEF. Una selezione crescente di indici è una successione

$$\mathbb{N} \ni k \longmapsto n_k \in \mathbb{N}$$

strettamente crescente.

DEF. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una selezione crescente di indici.

La successione

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

si dice sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione Se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi, allora NON esiste il

$$\lim_{n\to\infty} a_n .$$

Esempio Il seguente limite NON esiste

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n \cos(\pi n) \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{= a_n} .$$

Infatti $\cos(\pi n) = (-1)^n$ è alternante.

Inoltre

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad n \to \infty.$$

Dunque

$$a_{2n} = 2n\left(-\frac{1}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$

$$= -\frac{2n}{2n+1}\left(1 + o(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)\left(\frac{1}{2n+2} + o\left(\frac{1}{2n+2}\right)\right)$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2}\left(1 + o(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +1.$$

$\square$

TEOREMA Ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

Dim. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e consideriamo l'insieme

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Ci sono due casi:

1° caso: A è finito;

2° caso: A contiene infiniti elementi.

Nel 1° caso esiste almeno un elemento $x \in A$ tale che $a_n = x$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante (e quindi convergente).

2° caso. Per il Teorema di Bolzano esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A:

$$A \cap I_{1/k}(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ove $I_{1/k}(x_0) = (x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k})$.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un indice $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n_k} \in A \cap I_{1/k}(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Possiamo scegliere n_k in modo tale che risulti $n_k < n_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dunque $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una selezione crescente di indici.

Siccome

$$|a_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k} \qquad \forall k \geq 1$$

si ha

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = x_0 .$$

□

<u>TEOREMA (Weierstrass)</u> Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato (= "intervallo compatto") e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x),$$

$$f(x_1) = \max_{x \in A} f(x).$$

Dim. Dimostriamo l'esistenza di x_0, punto di minimo. Esiste, finito o $-\infty$, l'estremo inferiore

$$L = \inf \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in A \}.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in A$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L .$$

Siccome la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

per qualche $x_0 \in A$ (A è chiuso).

Chiaramente

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L .$$

Siccome f è continua e $x_{n_k} \to x_0$ per $k\to\infty$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0).$$

Dunque

$$f(x_0) = L = \inf_{x\in A} f(x) ,$$

Questo prova che $L \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = \min_{x\in A} f(x)$.

□