CALCOLO DIFFERENZIALE

Nel seguito sia $A = [a,b]$ oppure $A = (a,b)$ un intervallo.

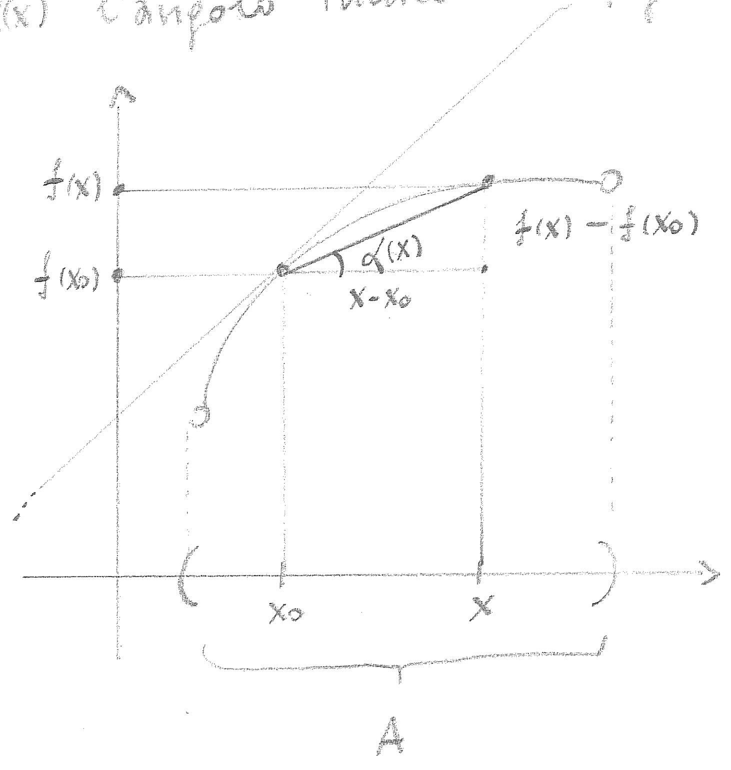
Definizione (Derivata) Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in un punto $x_0 \in A$ se esiste finito il seguente limite

$$Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Il numero $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ si dice derivata di f in x_0.

Interpretazione geometrica

Sia $\alpha = \alpha(x)$ l'angolo indicato in figura:



Allora si ha

$$tg\,\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e quindi

$$\alpha(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

Dunque l'esistenza della derivata equivale all'esistenza dell'angolo limite $\lim_{x \to x_0} \alpha(x)$.

<u>Definizione (Retta tangente)</u> La retta di equazione

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiama retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

<u>Osservazione</u> Si ha

$$f \text{ derivabile in } x_0 \quad \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{array} \quad f \text{ continua in } x_0$$

Infatti se esiste $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

con $o(1) \longrightarrow 0$ per $x \to x_0$, Dunque

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$$

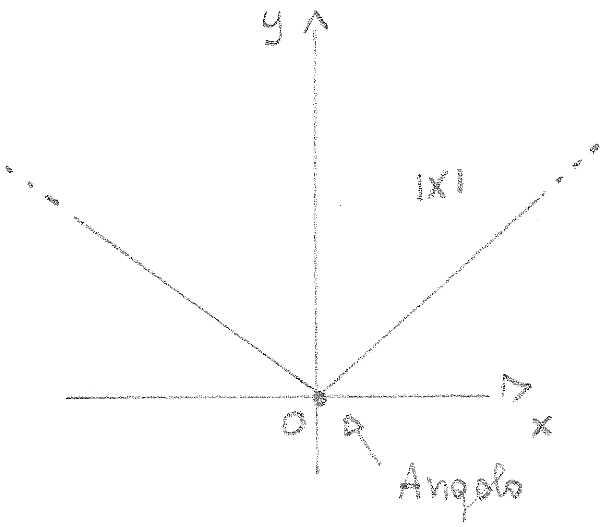
e pertanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

D'altra parte $f(x) = |x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



Derivate delle funzioni elementari

(1) Se $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ è una funzione costante allora

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \qquad \forall x$$

(2) Per $n \in \mathbb{N}$ si ha $D x^n = n x^{n-1}$. Infatti:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i - x^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i$$

E quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1}$$

Qui $i-1 \geq 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1}.$$

(3) $D \sin x = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Infatti:

$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$ e quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

(4) $D \cos x = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

Prova analoga a (3).

(5) $D a^x = (\log a)\, a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Qui $a>0$ è fissato.

Formiamo il quoziente incrementale:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Facciamo la sostituzione $t = \dfrac{1}{a^h - 1}$.

Nel caso $a>1$ e $h>0$ si ha $t>0$, Inoltre

$$h \to 0^+ \implies t \to +\infty,$$

$$t = \frac{1}{a^h - 1} \iff a^h - 1 = \frac{1}{t} \iff h \log a = \log\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

Dunque

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \frac{\log a}{\lim_{t \to \infty} \log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{\log a}{\log e} = \log a$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \log a .$$

(6) $\quad D e^x = e^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$. Segue dal punto (5).

(7) $\quad D \log |x| = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$.

senza valore assoluto!

Infatti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left|\frac{x+h}{x}\right| =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = (*)$$