3) $D \operatorname{arctg}(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Siano infatti $y_0 = tg(x_0)$. Allora:

$$D \operatorname{arctg}(y_0) = \frac{1}{D\, tg(x_0)} = \cos^2(x_0)$$

$$= \frac{\cos^2(x_0)}{\sin^2(x_0) + \cos^2(x_0)}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)}\right)^2 + 1} = \frac{1}{y_0^2 + 1}.$$

<u>Esercizio</u> Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1) \arcsin x - 6(\beta+3) \sin x, & x \in [-1,0] \\ 2\alpha\ (x^4+x) - (\beta+3)\left(\sqrt{x} + tg\, x\right), & x \in (0,1] \end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Deve esistere finito il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Equivalentemente, devono esistere ed essere uguali i limiti destro e sinistro

$$L_+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = L_- .$$

Conti:

$$L_+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\alpha(x^4+x) - (\beta+3)(\sqrt{x} + \operatorname{tg} x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 2\alpha(x^3+1) - (\beta+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$$

Siccome $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, affinché il limite esista finito deve essere

$$\beta + 3 = 0 .$$

In questo caso si trova

$$L_+ = 2\alpha$$

Limite sinistro:

$$L_- = \lim_{x \to 0^-} \frac{(\alpha+1)\arcsin x - \overbrace{6(\beta+3)\sin x}^{=0}}{x} ,$$

Siccome

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

si trova $L_- = \alpha + 1$.

Quindi dobbiamo imporre:

$$2\alpha = \alpha + 1 \iff \alpha = 1.$$

Dunque, f è derivabile in $x=0$ se e solo se $\beta = -3$ e $\alpha = 1$. $\square$

<u>Definizione (Punti di estremo locale)</u>
Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di <u>minimo locale</u> di f su A se:

$\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$.

Il minimo locale è <u>stretto</u> se $f(x) > f(x_0)$ per $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

2) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di <u>massimo locale</u> di f su A se:

$\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$.

Il massimo locale è stretto se $f(x) < f(x_0)$ per $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ -

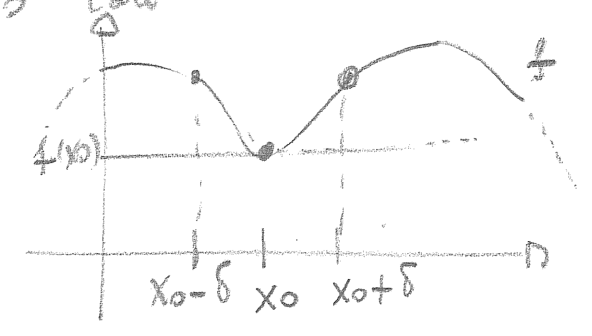
3) Un punto $x_0 \in A$ è un punto di estremo locale se è un punto di min, o di max, locale.

Definizione (Punto critico) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su A. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto critico di f se $f'(x_0) = 0$

TEOREMA Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile.
Se x_0 è un punto di estremo locale allora $f'(x_0) = 0$.

Dim, Supponiamo ad esempio che x_0 sia un punto di minimo locale:

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



Dunque:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0 .$$

Deduciamo che $f'(x_0) = 0$

$\square$

<u>Osservazione</u> Osserviamo che

punto critico $\not\Longrightarrow$ punto di estremo locale.

Sia $f(x) = x^3$. Allora $x = 0$ è p.to critico

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0 .$$

Tuttavia $x = 0$ non è né punto di min. né punto di max locale: