TEOREMA (Rolle) Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) tale che $f(a) = f(b)$.
Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) = 0$.

Dim. Per il Teorema di Weierstraß esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x),$$

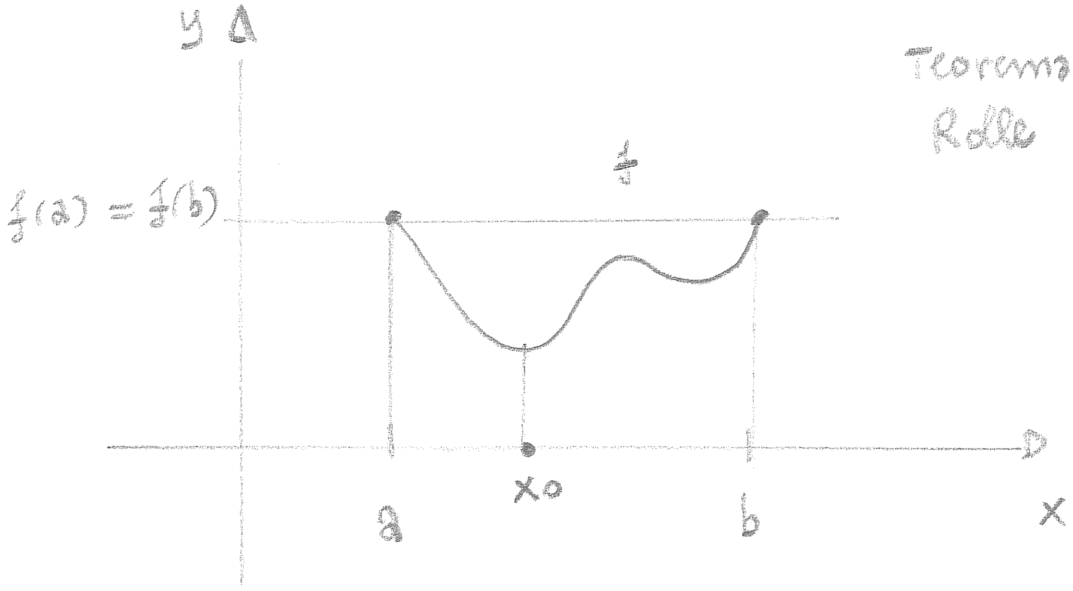
$$f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

1° Caso: $x_0, x_1 \in \{a,b\}$
Siccome $f(a) = f(b)$ questo implica che f è costante e quindi $f' = 0$ su (a,b).

2° Caso: $x_0 \in (a,b)$ oppure $x_1 \in (a,b)$.
Dunque c'è almeno un punto di estremo interno, ad esempio x_0. Ma allora

$$f'(x_0) = 0.$$

□



Teorema di Rolle

<u>TEOREMA</u> (Lagrange) Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Allora esiste un punto $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Dim. Introduciamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a),$$

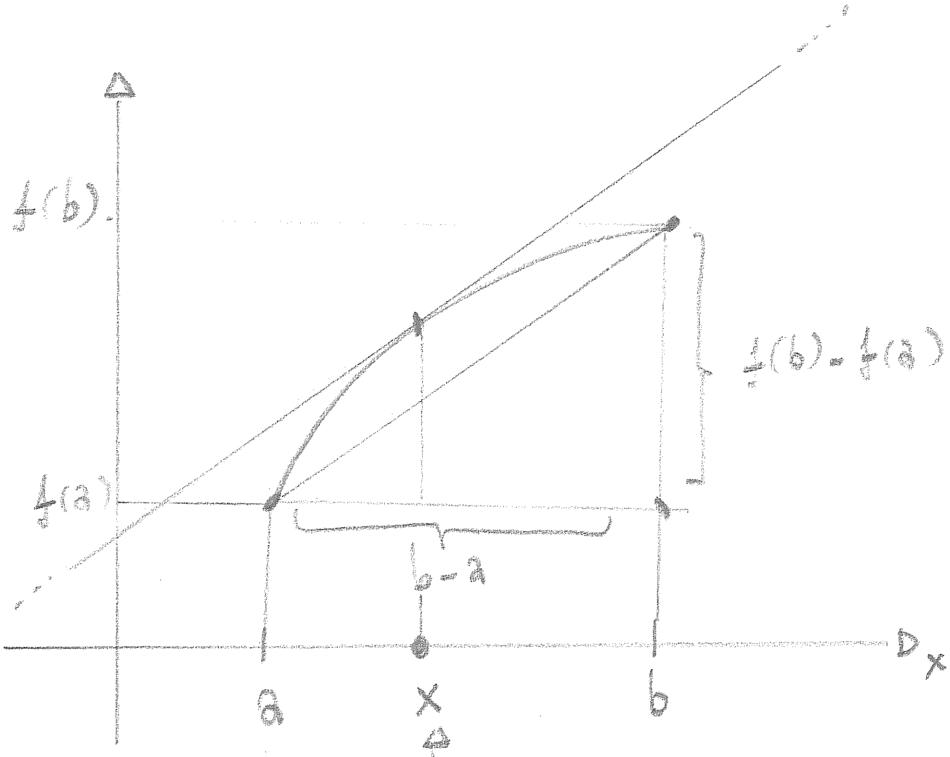
Allora

$$h(a) = f(a)$$
$$h(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Per il Teorema di Rolle esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$



<u>Corollario</u> Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è costante.

Dim. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ generici. Esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{f'(x)} \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

Quindi $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

<u>Teorema (Cauchy)</u> Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Supponiamo che $g(a) \neq g(b)$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x) .$$

Allora:

$$h(a) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(a) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(a)$$

$$= f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a) ,$$

$$h(b) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g(b) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(b)$$

$$= - f(a)\, g(b) + g(a)\, f(b) .$$

Per il Teorema di Rolle esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$0 = h'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g'(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(x) .$$

La tesi segue. $\square$

TEOREMA (Derivata e monotonia) Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:

(1) f è crescente $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(2) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \underset{(\not\Leftarrow)}{\Longrightarrow}$ f è strett. crescente

Dim (1) Sia f crescente. Allora:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{se } h > 0$$

Dunque

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Supponiamo ora che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$.
Per il Teorema di Lagrange esiste $x \in (x_1, x_2)$
tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0.$$

Dunque $x_2 > x_1 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

(2) Prova Analoga. <u>Esercizio</u>.