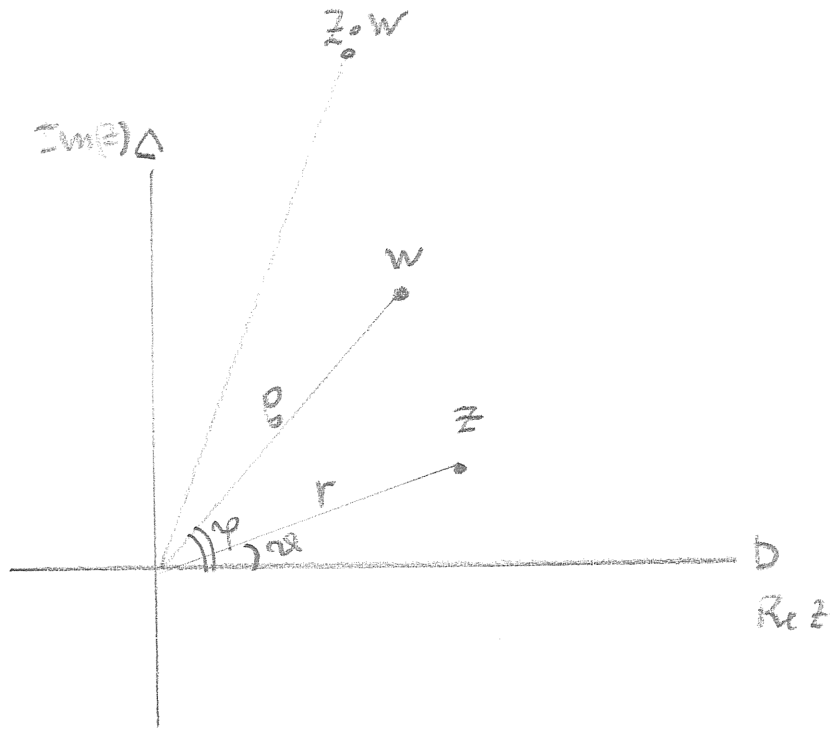
Siano $z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ e

$w = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

numeri complessi. Allora

$$z \cdot w = r\varrho \left[\cos\vartheta \cos\varphi - \sin\vartheta \sin\varphi + i(\cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi)\right]$$

$$= \underbrace{r\varrho}_{\text{Prodotto moduli}} \left(\cos\underbrace{(\vartheta+\varphi)}_{\text{Somma Argomenti}} + i \sin(\vartheta+\varphi)\right)$$



Poniamo (Formula di Eulero)

$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta .$$

Chiaramente $|e^{i\vartheta}| = 1 \quad \forall \vartheta$.

Vale la proprietà:

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$$

e quindi si ottiene la formula di De Moivre:

$$\left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{in\vartheta} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

<u>Radici di un numero complesso</u>

Sia $w = Re^{i\varphi}$ con $R \geq 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$ un numero complesso e sia $n \in \mathbb{N}$.

Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w .$$

Cioè: vogliamo trovare (tutte) le radici n-esime di $w \in \mathbb{C}$.

Cerchiamo delle soluzioni della forma

$$z = r e^{i\vartheta}$$

con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare.

Avremo

$$z^n = (r e^{i\vartheta})^n = r^n (e^{i\vartheta})^n$$
$$= r^n e^{in\vartheta} .$$

L'equazione $z^n = w$ diventa

$$r^n e^{in\vartheta} = R e^{i\varphi} .$$

Uguagliando i moduli si ottiene

$$r^n = R , \quad \text{ovvero} \quad r = \sqrt[n]{R} .$$

D'altra parte

$$e^{in\vartheta} = e^{i\varphi} \iff n\vartheta = \varphi + 2K\pi$$
$$K \in \mathbb{Z}$$

e quindi si trova

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2K\pi}{n} , \quad K \in \mathbb{Z}$$

Basta considerare $K = 0, 1, 2, \dots n-1$, perché gli altri K danno ripetizioni.

Si trovano dunque n radici distinte (se $w \neq 0$)

$$z_K = \sqrt[n]{R}\, e^{i\vartheta_K} , \quad \vartheta_K = \frac{\varphi}{n} + \frac{2K}{n}\pi$$
$$K = 0, 1, 2, \dots, n-1 .$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati.

<u>Esempio</u>: Risolviamo $z^4 = -1$.
Si parte da $-1 = e^{i\pi}$, ovvero $\varphi = \pi$, $R = 1$.
Dunque le radici sono

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$