Esempio Sia $f(x) = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ punto base. Scriviamo lo sviluppo di Taylor.

Chiaramente

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},$$

e dunque $\quad f^{(k)}(0) = 1 \quad$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Deduciamo che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Esempio Scriviamo lo sviluppo della funzione $f(x) = \sin x$ intorno al punto base $x_0 = 0$.

Calcoliamo le prime quattro derivate:

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

In generale avremo

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Dunque si trova lo sviluppo:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(D^{(2n+2)} \sin)(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

con $\xi \in (0, x)$.

Osserviamo che

$$(D^{(2n+2)} \sin)(\xi)\, x^{2n+2} \underset{x \to 0}{=} o(x^{2n+2}).$$

<u>ESERCIZIO</u> Ricavare lo sviluppo di $f(x) = \cos x$ con punto base $x_0 = 0$.

<u>ESEMPIO</u> Calcoliamo lo sviluppo della funzione $f(x) = \log(1+x)$ con punto base $x_0 = 0$.

Derivate:

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2!$$

In generale avremo

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} (k-1)! \, (1+x)^{-k}$$

e quindi $\quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)! \, .$

Di conseguenza si ottiene lo sviluppo

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \, .$$

<u>ESERCIZIO</u> Sviluppare la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ nel punto $x_0 = 0$ con precisione fino all'ordine 3.

Soluzione. Calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \, D(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4}$$

Di conseguenza :

$$f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -2$$

Lo sviluppo con resto di Peano è

$$\operatorname{arctg}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) .$$

<u>Definizione (Sviluppo di Taylor)</u> Siano $A = (a,b)$ ed $f \in C^\infty(A)$. Si dice che f si sviluppa in serie di Taylor su A se per ogni punto base $x_0 \in A$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) , \quad \forall x \in A .$$

In questo caso risulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k , \quad x \in A ,$$

<u>Esempio</u> Verifichiamo che $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, si sviluppa in serie di Taylor ad esempio con punto base $x_0 = 0$.

Infatti il Resto n-esimo

$$R_n(x,0) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \text{con } \xi \in (0,x).$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0 .$$

Di conseguenza si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Esercizio</u> Verificare che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono sviluppabili in serie di Taylor e risulta

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

<u>Formule di Eulero</u> Nella formula

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

sostituiamo ix al posto di x. Si trova

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} i^k,$$

Abbiamo

$$i^0 = 1, \; i^1 = i, \; i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = 1$$

In generale abbiamo

$$i^k = \begin{cases} (-1)^m & k = 2m, \\ (-1)^m i & k = 2m+1. \end{cases}$$

Dunque

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

$\square$