Serie a Segno Alterno

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Una serie della forma
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$
si dice a segno alterno.

Teorema (Criterio di Leibniz) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che:

1) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Allora la serie a segno alterno
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$
converge.

Dim. Consideriamo le somme parziali di indice pari e di indice dispari:
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k ,$$
$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k .$$

Chiaramente
$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$
$$= S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$$

in quanto $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (segue da 1) + 2)).

Inoltre

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$= S_{2n} + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+1}}_{1) \Rightarrow \leq 0} \leq S_{2n}$$

e analogamente

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n}}_{1) \Rightarrow \geq 0} \geq S_{2n-1}.$$

Dunque:

$$S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_4 \leq S_2,$$

Ovvero: - $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e sup. limitata

- $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e inf. limitata.

Dunque esistono finiti

$$S^+ = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1}$$

$$S^- = \lim_{n \to \infty} S_{n}.$$

Inoltre

$$S^+ - S^- = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} - \lim_{n \to \infty} S_{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = 0,$$

e quindi $S^+ = S^- = S \in \mathbb{R}$.

Dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

segue che risulta anche

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

ovvero la serie data converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = S.$$

□