Funzioni di variabile reale

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ insiemi. Una funzione

$$f : A \to B$$

è un'applicazione che ad ogni elemento $x \in A$ associa un univocamente determinato elemento $f(x) \in B$.

Diremo che:

$A = D(f)$ è il dominio di f

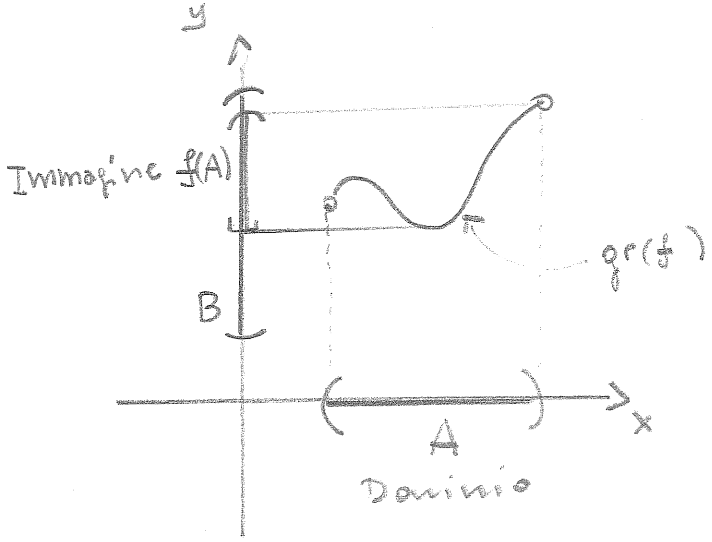
B è il codominio.

L'insieme $f(A) = \{ f(x) \in B : x \in A \}$
$= \{ y \in B : \exists x \in A \text{ tale che } f(x) = y \}$

si chiama immagine di A rispetto ad f.

Il grafico di f è il sottoinsieme del piano cartesiano

$$gr(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A = D(f) \}.$$



Diciamo che $A \subset \mathbb{R}$ è simmetrico se

$$x \in A \iff -x \in A.$$

Diremo che $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è pari se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A.$$

Diremo che f è dispari se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A.$$

<u>Esempio</u>

1) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, è pari:

$$f(-x) = \frac{(-x)\sin(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{x \sin(x)}{1+x^2} = f(x).$$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 \cos x}{\log(1+|x|)}$, $x \in \mathbb{R}$, è dispari:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{\log(1+|-x|)} = -\frac{x^3 \cos(x)}{\log(1+|x|)} = -f(x).$$

Definizione Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Definiamo:

1) $\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup \{ f(x) ; x \in A \}$

2) $\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{ f(x) ; x \in A \}$

3) Diremo che f è limitata se

$\sup_A f < \infty$ e $\inf_A f > -\infty$.

Osservazione $L = \sup_A f \in \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$;

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ tale che $L - \varepsilon < f(x)$.

Se esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \sup_A f$ scriveremo

$$\sup_A f = \max_A f$$

e diremo che x_0 è un punto di massimo.

Analoga definizione per $\min_A f$.

<u>Esercizio</u> Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ e $f(A) \subset \mathbb{R}$.

Soluzione. Funzione pari. Chiaramente

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Segue che

$$\inf_A f = \min_A f = 0$$

con $0 \in \mathbb{R}$ unico punto di minimo (assoluto).

Affermiamo che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1.$$

Da un lato:

$$f(x) \leq 1 \iff \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff x^2 \leq 1+x^2$$
$$\iff 0 \leq 1 \quad \text{OK.}$$

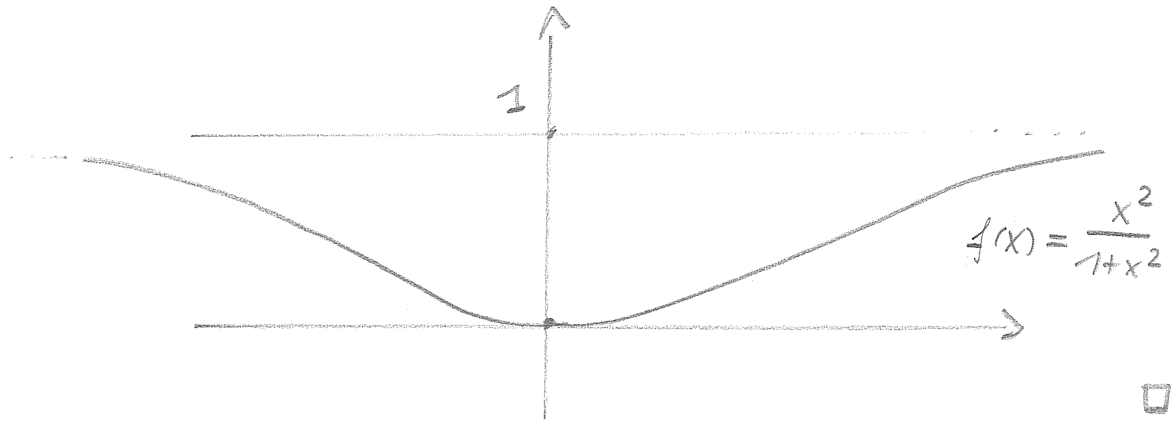
Sia $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 1-\varepsilon$, ovvero

$$\frac{x^2}{1+x^2} > 1-\varepsilon \iff x^2 > 1-\varepsilon + (1-\varepsilon)x^2$$
$$\iff \varepsilon x^2 > 1-\varepsilon$$
$$\iff x^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

e l'ultima disequazione ha soluzioni.

Per i conti precedenti: $f(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi f non assume valore massimo.



$\square$

<u>Definizione</u> Sia $f : A \to B$ una funzione.

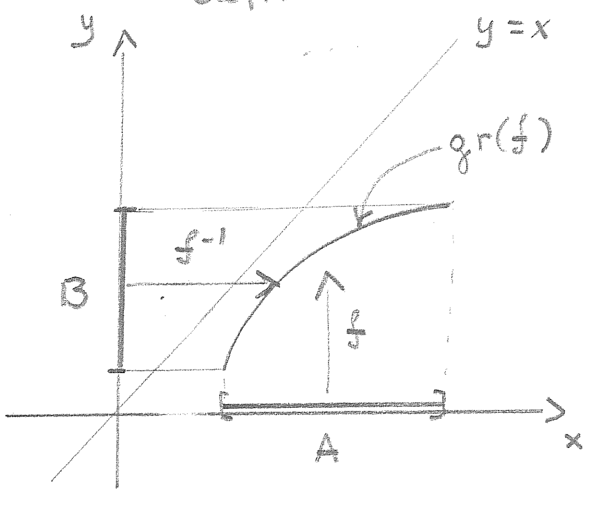
Diremo che:

1) f è iniettiva (1-1) se $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$;
2) f è suriettiva (su) se $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$;
3) f è bijettiva se f è 1-1 e su.

<u>Definizione</u> Sia $f : A \to B$ 1-1 e su.

Possiamo definire la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ in questo modo:

$$f^{-1}(y) = x \overset{\text{definizione}}{\Longleftrightarrow} f(x) = y.$$



Il $gr(f^{-1})$ si ottiene da $gr(f)$ con una riflessione rispetto a $y = x$.

<u>Esercizio</u> Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [0,1],$$

1) Provare che f è 1-1 e su;

2) Calcolare $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$.

Soluzione. (f è dispari)

1) Abbiamo:

$$f(x) = f(y) \iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\iff x + xy^2 = y + yx^2$$

$$\iff x - y + xy^2 - yx^2 = 0$$

$$\iff x - y + xy(y - x) = 0$$

$$\iff (x-y)(1-xy) = 0$$

Deduciamo che

$$f(x) = f(y) \implies x - y = 0 \text{ oppure } 1 - xy = 0.$$

L'equazione $xy = 1$ con $x, y \in [0,1]$ è verificata solo per $x = y = 1$.

2) Dato $y \in [0,1]$ cerco $x \in [0,1]$ tale che

$$f(x) = y \iff \frac{2x}{1+x^2} = y$$

$$\iff 2x = y + yx^2$$

$$\iff yx^2 - 2x + y = 0.$$