Esercizio 3 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione
$$z^3 = 9\bar{z}.$$

Risoluzione. Certamente $z=0$ è soluzione. Cerco soluzioni della forma $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Osservo che
$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{re^{i\vartheta}} = r\,\overline{e^{i\vartheta}} \\
&= r\,\overline{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \\
&= r\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) \\
&= r\,(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) \\
&= e^{-i\vartheta}.
\end{aligned}$$

Dunque
$$z^3 = 9\bar{z} \iff r^3 e^{3i\vartheta} = 9r\,e^{-i\vartheta}$$
e deduco che
$$r^3 = 9r \iff r = 0 \text{ oppure } r = 3$$
e poi
$$3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
ovvero
$$\vartheta_k = \frac{k}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Trovo le soluzioni

$$z_0 = 3e^{i\cdot 0} = 3$$
$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$$
$$z_2 = 3e^{i\pi} = -3$$
$$z_3 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i,$$

cui va aggiunta $z=0$. □

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

Risoluzione. Riscriviamo l'equazione in questo modo

$$z^2(z\bar{z}+3) = 4$$
$$\Updownarrow$$
$$z^2(|z|^2+3) = 4 \qquad (*)$$

Eguagliamo i moduli a sinistra e destra:

$$|z^2|(|z|^2+3) = |z^2(|z|^2+3)| = |4| = 4$$

e osserviamo che $|z^2| = |z|^2$. Otteniamo

$$|z|^2(|z|^2+3) - 4 = 0$$

Si ottiene l'equazione quadratica in $t = |z|^2 \geq 0$:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Le soluzioni sono

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

Di queste solo $t = 1$ è accettabile, in quanto deve essere $t \geq 0$. Abbiamo determinato il modulo di tutte le soluzioni:

$$|z| = 1$$

Sostituendolo nella (*) si ottiene

$$z^2 = 1$$

che ha le soluzioni $z = \pm 1$. □

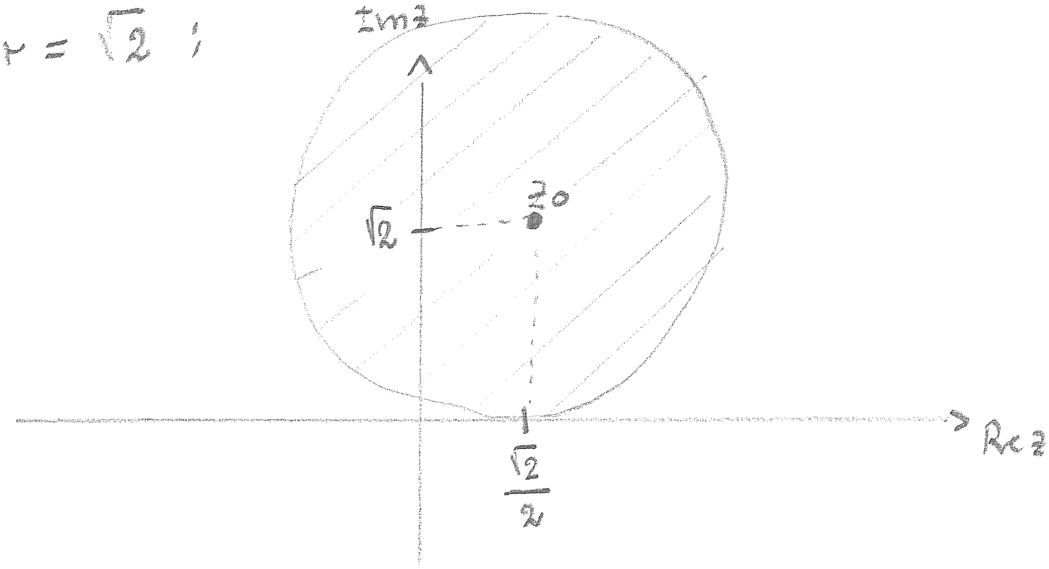
Esercizio 5 Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(i z^2 - i \bar{z}^2) \geq -4 \\ \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Risoluzione. L'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left| z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} \right) \right| \leq \sqrt{2}$$

è un cerchio di centro $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$ e raggio $r = \sqrt{2}$;



Conti:

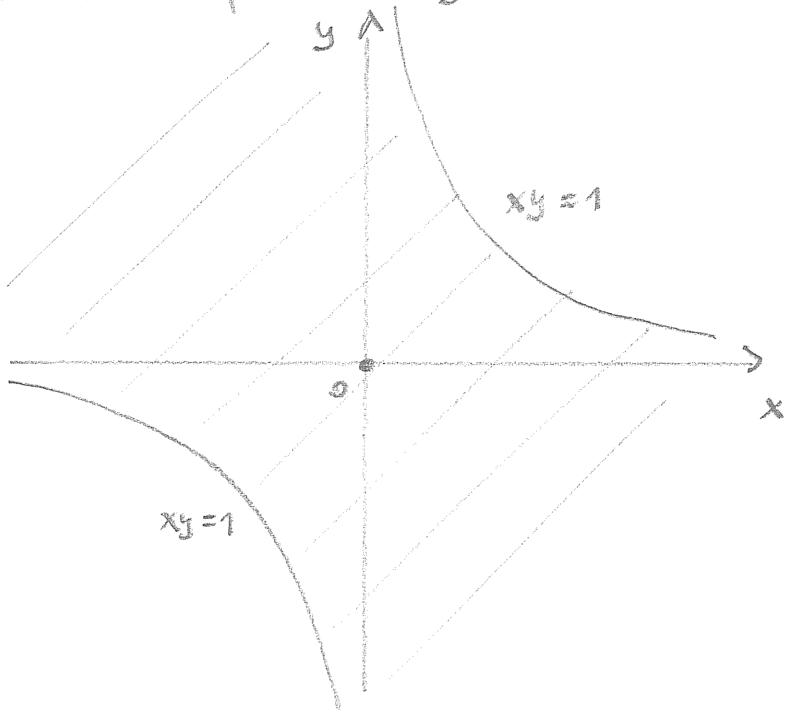
$$i z^2 - i \bar{z}^2 = i(x+iy)^2 - i(x-iy)^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) - i(x^2 - 2ixy - y^2) = -2xy - 2xy + i(x^2 - x^2 - y^2 + y^2)$$

$$= -4xy$$

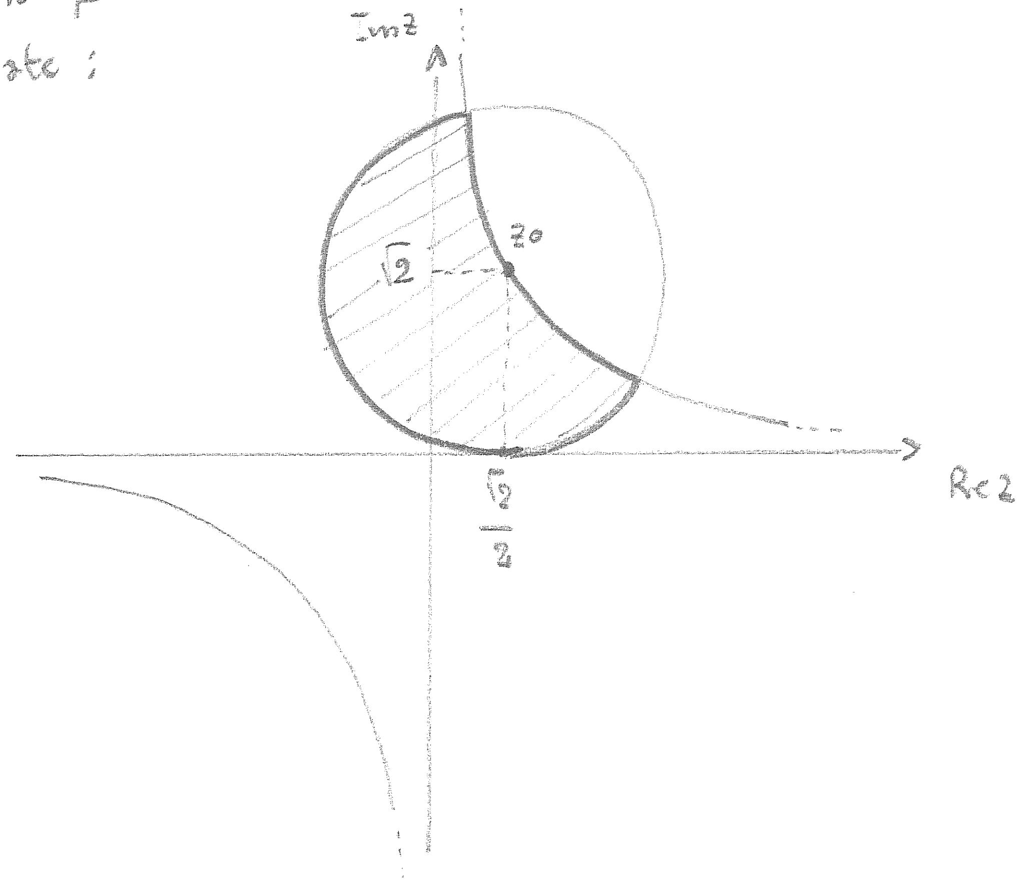
Dunque $\operatorname{Re}(i z^2 - i \bar{z}^2) \geq -4 \iff -4xy \geq -4$

$$\iff xy \leq 1$$

L'insieme $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1 \}$ è la regione delimitata dalle iperboli $xy = 1$



Dobbiamo formare l'intersezione delle due regioni tratteggiate:



□