ESERCIZIO 11 Calcolare il seguente limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

Soluzione. Abbiamo le stime

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e inoltre

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Siccome $x \mapsto \sqrt{x}$ è una funzione continua;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

quindi

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

e per il Teorema del Confronto da (1), (2) e (3) deduciamo che

$$L = 1.$$

$\square$

ESERCIZIO 12 Calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

Soluzione. Dalle disuguaglianze

$$3 \leq \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

e dal fatto che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

segue per il Teorema del confronto che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 .$$

□

ESERCIZIO Calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n \sin n}{3n^2 + \cos n} .$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{n^2 - n \sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{n^2\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{n^2\left(3 + \frac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}}$$

Poiché

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad e \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

(successione infinitesima · successione limitata = infinitesima)

Dal Teorema sul quoziente dei limiti otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{\cos n}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

□

ESERCIZIO 13 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

Soluzione. Usiamo l'identità

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

per ottenere

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

Quindi

$$n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

□

ESERCIZIO 14 Calcolare il seguente limite

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{n 2^n + \log^4 n}{3^n + n^2} .$$

Soluzione. Il termine dominante al numeratore è $n 2^n$, quello al denominatore è 3^n:

$$\frac{n 2^n + \log^4 n}{3^n + n^2} = \frac{n 2^n}{3^n} \frac{1 + \frac{\log^4 n}{n 2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}} .$$

Osserviamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log^4 n}{n 2^n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n 2^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0 .$$

Dal Teorema sulle operazioni coi limiti segue che

$$L = 0$$

$\square$