ESERCIZIO 15 Dire se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} .$$

Risposta. Non converge in quanto non è verificata la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

$\square$

ESERCIZIO 15bis Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}$$

Soluzione. Usiamo la formula per la serie geometrica:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -1 + \frac{2}{2-1} = 2-1 = 1.$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 3\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) = 3\left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = 3\left(-1+\frac{9}{8}\right) = \frac{3}{8}.$$

$\square$

ESERCIZIO 16 Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Soluzione. É una serie a termini positivi:

$$\frac{1+\cos(n)}{\sqrt{n^3+1}} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Teorema del Confronto:

$$\frac{1+\cos(n)}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Siccome la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < \infty$$

converge, essendo $\frac{3}{2} > 1$, segue per confronto che converge anche la serie data

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{\sqrt{n^3+1}} < \infty$$

Converge.

$\square$

ESERCIZIO 17 Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Il significato della rappresentazione decimale è

$$0,\overline{45} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{2}{5} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + 5 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{5} \frac{100}{99} + 5 \left(\frac{100}{99} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{5} \frac{100}{99} + 5 \frac{1}{99}$$

$$= \frac{1}{99} \left(40 + 5 \right) = \frac{45}{99}.$$

$\square$

ESERCIZIO 18 Verificare che la "serie esponenziale"

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

Soluzione. É una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dunque $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge.

ESERCIZIO 19 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n} |x|^n.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi (≥ 0). Possiamo quindi usare il Criterio della Radice.

Detto $a_n = \frac{\log(n+2)}{n} |x|^n$ avremo;

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(n+2)}{n}} \cdot |x|$$

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\log(n+2)}{n}} = M$$

con il Teorema del confronto:

$$\frac{\sqrt[n]{\log 2}}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{\log(n+2)}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Dai limiti noti

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

deduciamo per confronto che

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = |x|.$$

Abbiamo due casi:

1° Caso: $|x| < 1$. La serie converge.

2° Caso: $|x| > 1$. La serie diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $L = |x| = 1$, ovvero $x = \pm 1$.

In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n} .$$

Questa serie diverge, per confronto con la serie armonica:

$$\frac{\log(n+2)}{n} \geq \frac{\log 2}{n}$$

ed è noto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

$\square$

<u>ESERCIZIO 20</u> Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha} .$$

Soluzione. Riscriviamo il termine generale nel seguente modo

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\right)}{n^\alpha \left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\right)}$$

$$= \frac{(n^3+1) - (n^3-1)}{n^\alpha n^{3/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)} = \frac{2}{n^{\alpha+\frac{3}{2}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$