Detto

$$a_n = \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2-2x)^n$$

studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

con il Criterio della Radice:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5\sqrt[n]{\log(n+1)}} |x^2-2x| .$$

Per confronto

$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n} .$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{\log 2} & \leq & \sqrt[n]{\log(n+1)} & \leq & \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

e dunque

$$L(x) = \frac{4}{5} |x^2-2x|$$

Per il Criterio della Radice:

1) $L(x) < 1 \Rightarrow$ c'è convergenza assoluta

2) $L(x) > 1 \Longrightarrow$ Non c'è convergenza assoluta. Di più:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

Dunque, nel caso $L(x) > 1$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

e quindi non si ha neppure convergenza semplice.

Risolviamo la disequazione

$$L(x) < 1 \iff \frac{4}{5} |x^2 - 2x| < 1 \iff |x^2 - 2x| < \frac{5}{4} .$$

La disequazione con valore assoluto è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x^2 - 2x > -\frac{5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0 . \end{cases}$$

Le radici di $x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$ sono

$$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5/4}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = 1 \pm \frac{3}{2}$$

Dunque

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \iff -\frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} < x < 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} .$$

Le radici di $x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$ sono (sarebbero)

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{4}} \qquad \text{ma} \quad 1 - \frac{5}{4} < 0 .$$

Dunque $x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La conclusione è che

$$L(x) < 1 \iff |x^2-2x| < \frac{5}{4} \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

In questo caso la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

Analogamente:

$$L(x) > 1 \iff x < -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{5}{2}.$$

In questo caso la serie non converge (né assolutamente né semplicemente) in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Rimane da discutere il caso

$$L(x) = 1 \iff |x^2-2x| = \frac{5}{4}$$

$$\iff x = -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{2}$$

In entrambi i casi: $x^2-2x = +\frac{5}{4}$
Quindi per $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$ la serie iniziale diventa

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}.$$

Questa serie converge per il Criterio di Leibniz.
Infatti $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$ verifica:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$;

(2) $a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{\log(n+2)} \leq \frac{1}{\log(n+1)}$

$\iff \log(n+1) \leq \log(n+2)$

$\iff n+1 \leq n+2$

$\iff 1 \leq 2$ Vero.

Proviamo che la serie (*) non converge assolutamente, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \infty .$$

Lo proviamo per confronto. Infatti:

$$\underset{\text{noto}}{\log(n+1) \leq n} \implies \frac{1}{\log(n+1)} \geq \frac{1}{n}$$

e la serie dunque diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

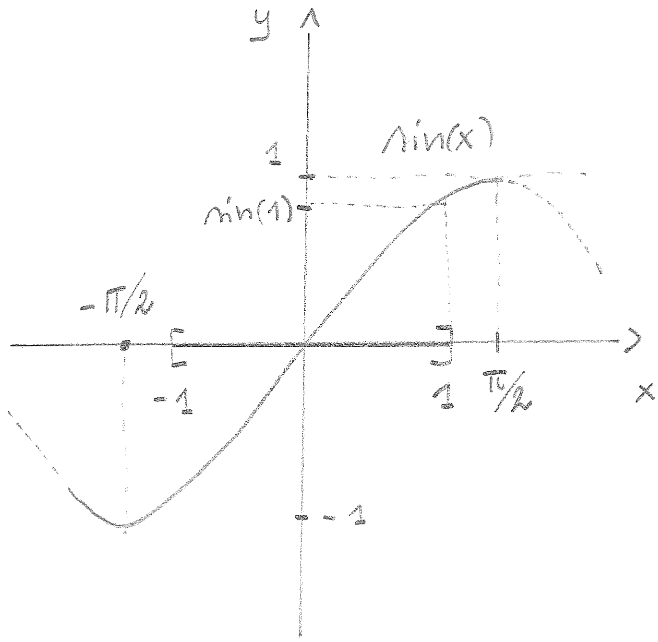
$\square$

ESERCIZIO 25 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin(\sin n)\right)^n .$$

Soluzione. Osservo che

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Di conseguenza

$$\left| \sin(\sin n) \right| \leq \sin(1) = q < 1$$

Per confronto con la serie geometrica di ragione $q < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin(\sin n) \right|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty .$$

La serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

$\square$

ESERCIZIO 26 Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} .$$

Soluzione. Utilizziamo il Criterio del Rapporto.

Detto
$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

il termine generale della serie, avremo
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\ n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Quindi
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

in quanto $e > 1$. Per il Criterio del rapporto la serie converge.