Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x \sin x^4 + \cosh(e^{\sqrt{2}x}-1) - 1 - \sin(x^2)}{x^\alpha - \sin x},$$

Soluzione: Sviluppiamo il denominatore $D = x^\alpha - \sin x$.
Siccome

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

si ha

$$D(x) = x^\alpha - x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^3}{6} + o(x^4) & \alpha = 1 \\ x^\alpha + o(x^\alpha) & 0 < \alpha < 1 \\ x + o(x) & \alpha > 1 \end{cases}$$

Infatti, se $0 < \alpha < 1$ allora $x = o(x^\alpha)$,
se $\alpha > 1$ allora $x^\alpha = o(x)$.

Sviluppiamo il numeratore con precisione fino al terzo ordine:

$$\sin(x^4) = x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Inoltre

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

e quindi

$$e^{\sqrt{2}x} - 1 = \sqrt{2}x + x^2 + \frac{2^{3/2}x^3}{6} + o(x^3),$$

Poi

$$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \qquad t \to 0$$

e quindi

$$\cosh\left(e^{\sqrt{2}x} - 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x + x^2 + \frac{2^{3/2}}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$$

$$= 1 + x^2 + \sqrt{2}\,x^3 + o(x^3)$$

Dunque il numeratore è

$$N(x) = \log x\,(x^4 + o(x^4)) + \cancel{1} + \cancel{x^2} + \sqrt{2}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x^2} + o(x^3)$$

e siccome $\log x \cdot x^4 = o(x^3)$ si trova

$$N(x) = \sqrt{2}\,x^3 + o(x^3).$$

Il limite è

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2}x^3 + o(x^3)}{x^{\alpha} - x + o(x^4)} = \begin{cases} 6\sqrt{2} & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} e^{1/x}\, dx .$$

Con la sostituzione $\frac{1}{x} = y$ ovvero $x = \frac{1}{y}$ si ha

$$dx = -\frac{1}{y^2}\, dy \quad \text{e inoltre} \quad \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = 1 \\ "x = \infty" &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Dunque

$$I = \int_1^0 y^4 e^y \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 y^2 e^y\, dy .$$

Facciamo integrazioni per parti con integrali indefiniti:

$$\int y^2 e^y\, dy = y^2 e^y - \int 2y e^y\, dy$$

$$= y^2 e^y - 2\left(y e^y - \int e^y\, dy\right)$$

$$= y^2 e^y - 2y e^y + 2 e^y + C$$

Quindi

$$I = \left[(y^2 - 2y + 2) e^y\right]_{y=0}^{y=1} = e - 2 .$$

Esercizio. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left| z^2\left(\overline{(z+4i)} - \bar{z} \right) \right| = \left| z(z+4i) - \bar{z} z \right|$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Soluzione. L'equazione è

$$|z| \, \left| z\left(\overline{(z+4i)} - z \right) \right| = |z| \, \left| z+4i - \bar{z} \right|$$

Una soluzione è $z=0$. Per $z \neq 0$ dividiamo per $|z| \neq 0$ e troviamo

$$|z| \, \left| \bar{z} - 4i - z \right| = \left| z + 4i - \bar{z} \right|$$

Siccome $|w| = |\bar{w}|$ si ha $|z+4i-\bar{z}| = \left| \overline{z+4i-\bar{z}} \right| =$
$= |\bar{z} - 4i - z|$

L'equazione è dunque equivalente a

$$|z| \, |z+4i - \bar{z}| = |z+4i-\bar{z}|$$

Una soluzione è data da $|z+4i-\bar{z}| = 0$ ovvero
$z+4i-\bar{z} = 0 \iff 2i \,\mathrm{Im}\, z + 4i = 0 \iff \mathrm{Im}\, z = -2$.

Si trova la retta $\mathrm{Im}\, z = -2$.

Per $\mathrm{Im}\, z \neq -2$, possiamo dividere per $|z+4i-\bar{z}| \neq 0$ e si trova $|z| = 1$