ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \cosh x - \log|\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Soluzione. Vedere file allegato in rete.

Esercizio 2 [8 punti]
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \Big(n^2 + \log(n!) + \cos n\Big) \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Soluzione. Osserviamo che $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n^n$ e quindi $\log(n!) \leq \log n^n = n \log n$. Siccome $\log n/n \to 0$ per $n \to \infty$, si deduce per confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0.$$

Da (1) e dal fatto che $\cos n$ è limitato si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \cos n = n^2\Big(1 + \frac{\log n!}{n^2} + \frac{\cos n}{n^2}\Big) = n^2(1 + o(1)) \text{ per } n \to \infty,$$

dove $o(1) \to 0$ per $n \to \infty$. Usando

$$\log(1+n) = \log n\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log n + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

e lo sviluppo del seno, si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che $\log n/n^3 = o(1/n^2)$ per $n \to \infty$. Analogamente, usando

$$\log(1-n) = \log n\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \log n + \log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log n - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

e lo sviluppo dell'arcotangente si trova

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) = \frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}a_n &= \Big(n^2+\log(n!)+\cos n\Big)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right)\\ &= n^2\,(1+o(1))\left(\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (1+o(1))(2+o(1)),\end{aligned}$$

e da qui deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Esercizio 3 [9 punti]
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Soluzione. a) Con la sostituzione $\mathrm{e}^x = t$ si ha $x = \log t$ e quindi $dx = dt/t$. Gli estremi di integrazione cambiano nel seguente modo: $x = 0 \;\to\; t = 1$ e $x = \infty \;\to\; t = \infty$. Dunque si ha

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx = \int_1^\infty \frac{t^{2\alpha}-1}{t^2+1}\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{t^{2\alpha-1}}{t^2+1}\,dt - \int_1^\infty \frac{1}{t(t^2+1)}dt = I_1 - I_2.$$

L'integrale I_2 converge, indipendentemente da α, in quanto la funzione. integranda è asintotica a $1/t^3$ per $t \to \infty$. La funzione integranda dell'integrale I_1 è asintotica a $1/t^{3-2\alpha}$, e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale I_1 converge se e solo se $3 - 2\alpha > 1$ ovvero $\alpha < 1$.

b) Quando $\alpha = 1/2$, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int_1^\infty \frac{1}{t^2 + 1}\, dt - \int_1^\infty \frac{1}{t(t^2 + 1)} dt = I_1 - I_2.$$

Chiaramente sia ha

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = \big[\arctan(t)\big]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Per calcolare I_2 utilizziamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{t(t^2 + 1)} dt = \frac{A}{t} + \frac{B + Ct}{t^2 + 1} = \frac{A + Bt + (A + C)t^2}{t(t^2 + 1)},$$

da cui, uguagliando i coefficienti dei polinomi al numeratore, si ottiene $B = 0$, $A = 1$ e $C = -A = -1$. Si ottiene allora

$$I_2 = \int_1^\infty \Big(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}\Big) dt = \Big[\log t - \frac{1}{2}\log(t^2 + 1)\Big]_{t=1}^{t=\infty} = \Big[\log \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\Big]_{t=1}^{t=\infty} = \log\sqrt{2}.$$

In conclusione $I = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Soluzione. Certamente $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo altre soluzioni nella forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ dove $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ sono incognite da determinare. Ricordiamo che $\bar{z} = re{-}i\vartheta$. Trasformiamo il numero complesso -16 in forma esponenziale: $-16 = 16e^{i\pi}$. Dunque, usando le formule di de Moivre, l'equazione iniziale diventa

$$r^5 e^{5i\vartheta} = 16e^{i\pi} re^{-i\vartheta} = 16re^{i(\pi-\vartheta)}.$$

Uguagliando i moduli, si trova $r^5 = 16r$ che ha come soluzioni $r = 0$ (ovvero $z = 0$, soluzione già individuata) ed $r = 2$. Uguagliando gli argomenti si trova

$$5\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero $6\vartheta = \pi + 2k\pi$, e in conclusione

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

In forma algebrica, si trovano le soluzioni $z_k = 2e^{i\vartheta_k} = 2(\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_k)$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3} + i \\ z_1 &= 2i \\ z_2 &= -\sqrt{3} + i \\ z_3 &= -\sqrt{3} - i \\ z_4 &= -2i \\ z_5 &= \sqrt{3} - i. \end{aligned} \tag{1}$$

Le sei soluzioni $z_k = 2\mathrm{e}^{i\vartheta_k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, si dispongono sui vertici di un esagono regolare. In tutto si hanno sette soluzioni.