# Matematica A

Soluzione del Tema 4 del 13 Luglio 2007

---

**Esercizio 1.** Sia $f$ la funzione così definita:

$$f(x) = \frac{4\cosh x + 1}{\cosh x + 1}.$$

i) Determinare il dominio di $f$ ed eventuali simmetrie, i limiti significativi ed eventuali asintoti.

ii) Stabilire dove $f$ è continua e dove è derivabile.

iii) Calcolare la derivata prima. Studiare la monotonia di $f$ e determinare i punti di estremo relativo ed assoluto.

iv) Studiare concavità e convessità, determinare eventuali punti di flesso.

v) Tracciare un grafico qualitativo di $f$.

**Soluzione.**
**Dominio e segno.** Osserviamo che $\cosh x + 1 \geq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque il dominio della funzione è

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Poichè $4\cosh x + 1 \geq 5$, la funzione è strettamente positiva in tutto il dominio.

**Simmetrie.** La funzione è pari, cioè $f(-x) = f(x)$, perchè $\cosh x$ è pari. È sufficiente studiare la funzione solo per $x \geq 0$.

**Limiti.** Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4\cosh x + 1}{\cosh x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4 + 1/\cosh x}{1 + 1/\cosh x} = 4.$$

**Asintoti.** La retta di equazione $y = 4$ è un asintoto orizzontale a destra e sinistra.

**Continuità.** La funzione è continua in tutto il dominio, in quanto quoziente di funzioni continue con denominatore che non si annulla .

**Derivata prima.** La funzione è derivabile in tutto il dominio. In effetti risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{3\sinh x}{(\cosh x + 1)^2}.$$

Studiamo is segno di $f'(x)$. Il denominatore è sempre strettamente positivo. Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0.$$

Inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Il punto $x = 0$ è un punto critico della funzione.

**Monotonia.** Abbiamo la seguente tabella:

| | | 0 |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $- - -$ | $+ + +$ |
| $f(x)$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |

Ovvero:

$f$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0]$,
$f$ è crescente nell'intervallo $[0, +\infty)$.

**Estremi.** Il punto $x = 0$ è il punto (unico) di minimo assoluto. Il valore minimo assunto da $f$ è $f(0) = 5/2$. Non ci sono punti di massimo.

**Derivata seconda.** Dopo un breve conto si trova

$$f''(x) = 3\frac{\cosh^2 x + \cosh x - 2\sinh^2 x}{(\cosh x + 1)^3},$$

e usando l'identità iperbolica $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ si trova

$$f''(x) = 3\frac{-\cosh^2 x + \cosh x + 2}{(\cosh x + 1)^3}.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$. Siccome il denominatore è sempre positivo, si ha

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\cosh^2 x + \cosh x + 2 \geq 0.$$

Poniamo $t = \cosh x$ con la restrizione $t \geq 1$. L'equazione $t^2 - t - 2 = 0$ ha le soluzioni $t = 2$ e $t = -1$, e dunque

$$t^2 - t - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq t \leq 2.$$

Tenuto conto della restrizione $t \geq 1$, si conclude che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq \operatorname{settcosh} 2.$$

Poniamo $x_0 = \operatorname{settcosh} 2$. Abbiamo la seguente tabella:

| | | $-x_0$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $- - -$ | $+ + +$ | $- - -$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $\cup$ | $\cap$ |

Ovvero, $f$ è convessa nell'intervallo $[-x_, x_0]$, è concava nell'intervallo $(-\infty, x_0]$ ed è concava nell'intervallo $[x_0, +\infty)$. I punti $-x_0$ e $x_0$ sono punti di flesso.

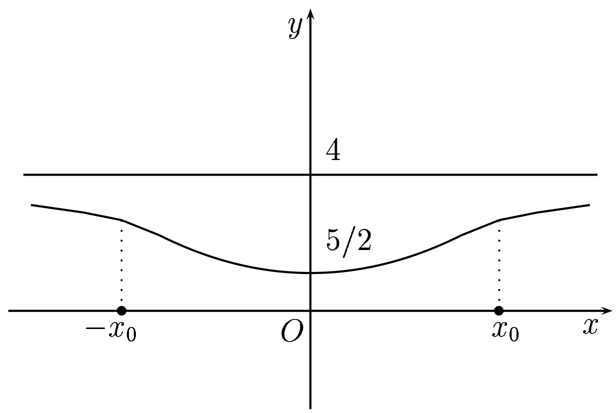



**Grafico di** $f(x)$

**Esercizio 2.** Calcolare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z+1|^2 + z^2 = 1 + 2i + \bar{z}(1-i) - z(i-3).$$

**Soluzione.** Poniamo $z = x + iy$. Sostituendo nell'equazione si trova

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - y^2 + 2ixy = 1 + 2i + x - ix - iy - y - ix + 3x + y + 3iy,$$

e semplificando si arriva a

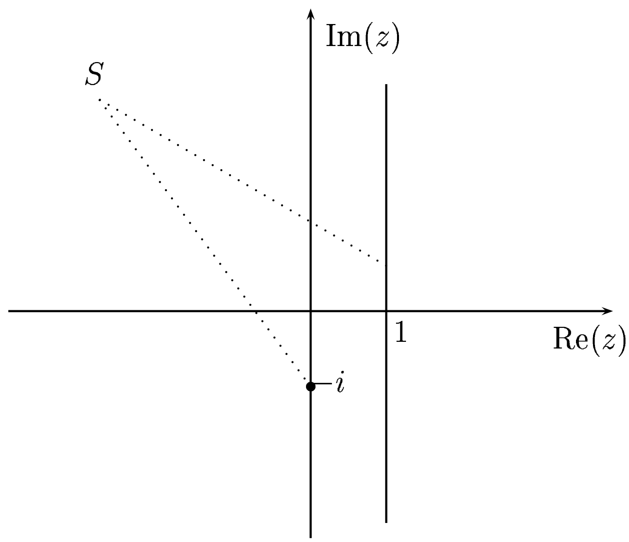
$$2x^2 - 2x + 2ixy = 2i - 2ix + 2iy.$$

Uguagliamo parti reali e parti immaginarie. Si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ 2xy = 2 - 2x + 2y. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $x^2 - x = 0$ sono $x = 0$ e $x = 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si ottiene $y = -1$. Sostituendo $x = 1$ nella seconda equazione si ottiene l'identità $y = y$ che è verificata per ogni $y \in \mathbb{R}$.
In conclusione, l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{-i\} \cup \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1\big\}.$$




**Esercizio 3.** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(\sinh x - x)}{\cos x}.$$
Studiare quindi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}\left(\sinh \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)}{\cos \frac{1}{n}}$$

**Soluzione.** Per $x \to 0$ abbiamo lo sviluppo di Taylor $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$. Dunque, si ha
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(\sinh x - x)}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha\left(\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)}{\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+3}\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)}{\cos x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -3 \\ \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = -3 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -3. \end{cases}$$
Detto $a_n$ il termine generale della serie, grazie ai conti precedenti abbiamo
$$a_n = \frac{\frac{1}{n^{\alpha+3}}\left(\frac{1}{6} + o(1/n)\right)}{\cos 1/n} = \frac{1}{n^{\alpha+3}}\left(\frac{1}{6} + o(1/n)\right).$$
Per il Criterio del confronto asintotico con successione di confronto $b_n = \frac{1}{n^{\alpha+3}}$, la serie converge assolutamente e semplicitemente se e solo se $\alpha + 3 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > -2$.