SOLUZIONE DEL TEMA 3

ESERCIZIO Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1 - 2\log^2 x}\,.$$

1) Dominio e segno.

Deve essere

$x > 0$ affinché $\log x$ sia definito

$1 - 2\log^2 x \geq 0$ affinché la radice sia definita

$(-1 \leq)\ \sqrt{1 - 2\log^2 x} \leq 1$ affinché l'arcsin sia definito.

Conti:

- $$1 - 2\log^2 x \geq 0 \iff \log^2 x \leq \frac{1}{2}$$
$$\iff |\log x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff e^{-1/\sqrt{2}} \leq x \leq e^{1/\sqrt{2}}$$

- $$\sqrt{1 - 2\log^2 x} \leq 1 \iff 1 - 2\log^2 x \leq 1$$
$$\iff \log^2 x \geq 0 \quad \text{sempre}$$

Conclusione: $D(f) = \left[e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}\right]$.

Segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-2\log^2 x} \geq 0$$

$$\iff \arcsin\sqrt{1-2\log^2 x} \leq \frac{\pi}{2} \quad \underline{\text{sempre}}.$$

Conclusione: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$.

In particolare:

$$f(x) = 0 \iff \arcsin\sqrt{1-2\log^2 x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \sqrt{1-2\log^2 x} = 1$$

$$\iff \log^2 x = 0$$

$$\iff x = 1 \in D(f).$$

2) Continuità e derivabilità.

f è continua su $D(f)$ in quanto composizione di funzioni continue.

- $\arcsin(t)$ <u>NON</u> è derivabile per $t = \pm 1$. Quindi il punto $x=1$ (per cui $\sqrt{1-2\log^2 x} = 1$) potrebbe essere di <u>non</u> derivabilità.
- $\sqrt{t}$ <u>non</u> è derivabile per $t=0$. Quindi i punti $x = e^{-1/\sqrt{2}}$ e $x = e^{1/\sqrt{2}}$ (per cui $1-2\log^2 x = 0$) potrebbero essere di <u>non</u> derivabilità.

Conclusione: f è derivabile su $(e^{-1/\sqrt{2}}, 1) \cup (1, e^{1/\sqrt{2}})$ in quanto composizione di funzioni derivabili.

3) f' e intervalli di monotonia.

Conti:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-2\log^2 x)}} \cdot \frac{-2\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-2\log^2 x}}$$

$$= \frac{2}{x}\,\frac{1}{\sqrt{2\log^2 x}}\,\frac{\log x}{\sqrt{1-2\log^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\,\frac{\log x}{|\log x|}\,\frac{1}{\sqrt{1-2\log^2 x}}$$

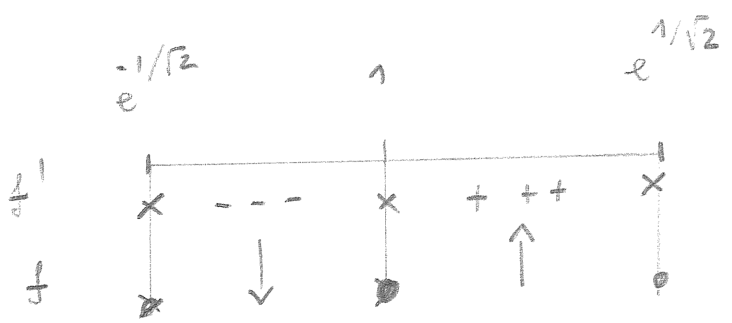
Su $D(f)$ abbiamo $x>0$. Dunque

$$f'(x) > 0 \iff \log x > 0 \iff x > 1$$

Precisamente:

$$f'(x) > 0 \iff 1 < x < e^{1/\sqrt{2}}$$

$$f'(x) < 0 \iff e^{-1/\sqrt{2}} < x < 1.$$



Il punto $x=1$ è di min assoluto ed $f(1)=0$

I punti $x = e^{\pm 1/\sqrt{2}}$ sono di max assoluto.

4) bis f è convessa. <u>Non richiesto</u>

Calcolo di f'' dove $\log x > 0$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \left(1-2\log^2 x\right)^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\,x^2} \left(1-2\log^2 x\right)^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \frac{1}{2} \left(1-2\log^2 x\right)^{-3/2} \cdot$$

$$\cdot \left(-4\frac{\log x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2} \left(1-2\log^2 x\right)^{-\frac{3}{2}} \left\{-\left(1-2\log^2 x\right) + 2\log x\right\}$$

Dunque (sempre per $x > 1$):

$$f''(x) > 0 \iff 2\log^2 x + 2\log x - 1 > 0$$

Studio $2t^2 + 2t - 1 > 0$. Radici $t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Dunque (Ristretto a $x > 1$)

$$f''(x) > 0 \iff \log x > \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{oppure}$$
$$\log x < \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{(Vuoto)}.$$

Osserviamo che:

$$0 < \frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi

$$1 < e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < e^{1/\sqrt{2}}$$

Conclusione:

	$e^{-1/\sqrt{2}}$		1		$e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$		$e^{1/\sqrt{2}}$
f''	x	$+++$	x	$---$		$+++$	x
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
					punto di flesso		

4) Limiti di f':

$$\lim_{x \to e^{-1/\sqrt{2}}+} \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \underbrace{\frac{\log x}{|\log x|}}_{=-1} \frac{1}{\sqrt{1-2\log^2 x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to e^{1/\sqrt{2}}-} \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \underbrace{\frac{\log x}{|\log x|}}_{=+1} \frac{1}{\sqrt{1-2\log^2 x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{2}\,x} \underbrace{\frac{\log x}{|\log x|}}_{=+1} \frac{1}{\sqrt{1-2\log^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \qquad " \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = 1$ p.to di angolo.

5) Grafico :