ESERCIZIO Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{12x}{9+x^2} \right)^n .$$

Soluzione. Convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{12x}{9+x^2} \right|^n$$

Criterio Radice:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \left| \frac{12x}{9+x^2} \right| = \frac{12|x|}{9+x^2} .$$

Dunque:

$L(x) < 1 \Rightarrow$ Serie Conv. Assol. $\Rightarrow$ Serie Conv. Sempl.

$L(x) > 1 \Rightarrow$ Serie non converge Assol. e nemmeno sempl. perché il termine generale non è infinitesimo

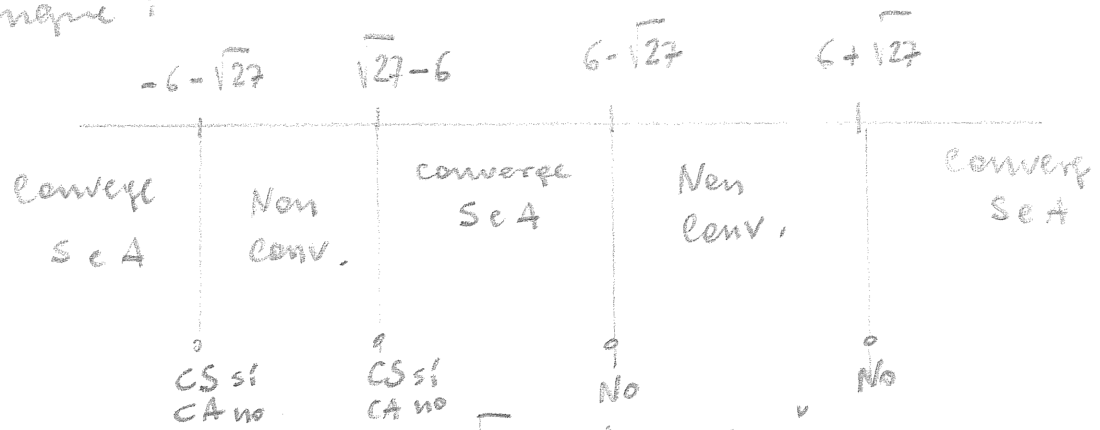
Studiamo

$$L(x) < 1 \iff 12|x| < 9 + |x|^2 \iff |x|^2 - 12|x| + 9 > 0$$

$$\iff |x| > 6 + \sqrt{36-9} = 6 + \sqrt{27} \quad \text{oppure}$$

$$|x| < 6 - \sqrt{27}$$

Dunque:

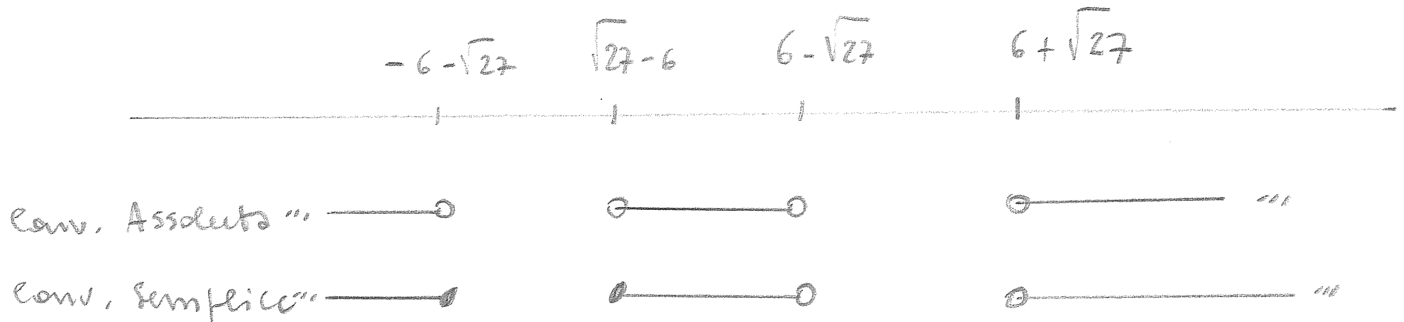


Nei punti $x = -6 \pm \sqrt{27}$ la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{converge per Leibniz}$$

Nei punti $x = 6 \pm \sqrt{27}$ la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{diverge.}$$



ESERCIZIO Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = 1$$

e rappresentarle nel piano complesso.

Soluzione. Poniamo $w = \dfrac{3z+1}{3z-1}$. Dobbiamo risolvere $w^3 = 1$. Con $w = r e^{i\vartheta}$ dove $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ abbiamo

$$r^3 = e^{i3\vartheta} = 1 = e^{i \cdot 0}$$

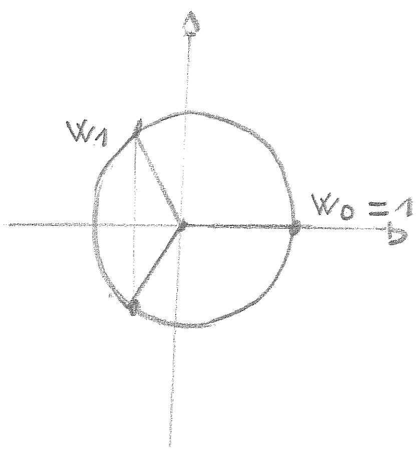
Dunque
$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\vartheta = 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Si trova $r = 1$ e inoltre

$$\vartheta_k = \frac{2k}{3}\pi \qquad k = 0, 1, 2$$

Precisamente

$$\vartheta_0 = 0$$
$$\vartheta_1 = \frac{2}{3}\pi$$
$$\vartheta_2 = \frac{4}{3}\pi$$



ovvero $\quad w_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$w_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_0 = 1$$

Risolviamo :

$$w = \frac{3z+1}{3z-1} \iff 3zw - w = 3z + 1$$

$$\iff 3z(w-1) = 1 + w$$

$$\iff z = \frac{1}{3}\,\frac{w+1}{w-1}\,.$$

Ovvero

$$z = \frac{1}{3}\,\frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{\bar{w}-1}{\bar{w}-1} = \frac{1}{3}\,\frac{|w|^2 - w + \bar{w} - 1}{|w|^2 - w - \bar{w} + 1}\,.$$

Nel nostro caso $|w| = 1$ e quindi

$$z = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{w} - w}{-w-\bar{w}+2} = \frac{1}{3}\,\frac{-2i\,\mathrm{Im}(w)}{-2\,\mathrm{Re}\,w + 2}$$

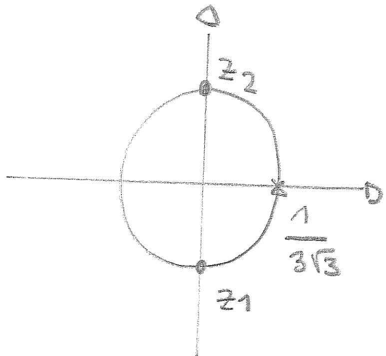
$$= \frac{1}{3}\,\frac{i\,\mathrm{Im}\,w}{\mathrm{Re}\,w - 1}$$

Deve essere $\mathrm{Re}\,w \neq 1$. Quindi w_0 è da scartare.

Si trovano <u>DUE SOLUZIONI</u>

$$z_1 = \frac{1}{3}\,\frac{i\,\mathrm{Im}\,w_1}{\mathrm{Re}\,w_1 - 1} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-1}\,i = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\,i$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\,\frac{i\,\mathrm{Im}\,w_2}{\mathrm{Re}\,w_2 - 1} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,i$$



<u>Soluzione Alternativa</u>. Deve essere $3z-1 \neq 0$.

L'equazione è equivalente a

$$(3z+1)^3 = (3z-1)^3 .$$

Sviluppiamo i cubi:

$$\cancel{27z^3} + 3\cdot 9z^2 + \cancel{3\cdot 3z} + 1 = \cancel{27z^3} - 3\cdot 9z^2 + \cancel{3\cdot 3z} - 1$$

Semplifichiamo

$$2\cdot 27 z^2 = -2 \iff z^2 = -\frac{1}{27}$$

Le soluzioni sono

$$z = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}\, i .$$