

# Analisi Matematica 1

Foglio 1

Induzione, estremo superiore.

11 Ottobre 2013

---

**Esercizio 1.** Disegnare nel piano tutte le coppie di numeri  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  che risolvono la disequazione

$$y \geq \sqrt{x^2 - 4y - 4}.$$

Risposta:  $0 \leq |x| - 2 \leq y \leq (x^2 - 4)/4$ .

**Esercizio 2.** Verificare mediante induzione le identità

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Esercizio 3.** Mediante induzione verificare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Esercizio 4.** Siano dati i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \{x^2 - 2x \sin x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad D = \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}.$$

- 1) Determinare  $\inf A$  e  $\sup A$ . Dire se esistono  $\min A$  e  $\max A$ .
- 2) Determinare  $\inf B$  e verificare che  $\sup B = 1/2$ . Dire se esistono  $\min B$  e  $\max B$ .
- 3) Verificare che  $\sup C = +\infty$ .
- 4) Verificare che  $\inf D = -\infty$ . ( $\log = \ln$  è il logaritmo naturale.)

**Esercizio 5. (Formula di Stiefel)** Siano  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ . Verificare l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

**Esercizio 6.** Ad un torneo di pallavolo partecipano  $n \in \mathbb{N}$  squadre,  $n \geq 3$ . Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre  $A, B, C$  tali che  $A$  sconfigge  $B$ ,  $B$  sconfigge  $C$  e  $C$  sconfigge  $A$ . Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.