Matematica A — Foglio 13

Convessità — 16 Gennaio 2014

Esercizio 1. Sia $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che, comunque presi $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, si verifica

$$f\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right) \leq \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1).$$

Esercizio 2. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4\left(\frac{\log x}{12} - \frac{7}{144}\right) - \alpha x^2\left(\frac{\log x}{2} - \frac{3}{4}\right),$$

sia convessa su tutto $(0, \infty)$.

Esercizio 3. Determinare tutti i numeri $p > 0$ tali che la funzione

$$f(x) = x^p + \frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

sia convessa su tutto $(0, \infty)$.
Risposta: $p \geq 1$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una funzione che verifica la seguente equazione (differenziale)

$$f'(x) = \sqrt{f(x)^3 + f(x) + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Provare che f è convessa.